

Discrete Mathematics in Computer Science

M. Helmert, G. Röger
S. Eriksson
Herbstsemester 2021

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 12

Abgabe: Donnerstag, 16. Dezember 2021

Aufgabe 12.1 (1 Punkt)

Geben Sie *alle* Gründe an, wieso $(\forall \exists xy((f(x) = g(y)) \wedge P(\neg x)) \vee (Q(x, c) = c))$ keine prädikatenlogische Formel über der Signatur $\langle \{x, y\}, \{c\}, \{f, g\}, \{P, Q\} \rangle$ mit $ar(f) = ar(P) = 1$ und $ar(g) = ar(Q) = 2$ ist.

Aufgabe 12.2 (2 Punkte)

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen über natürliche Zahlen als prädikatenlogische Formeln über der Signatur $\langle \{x, y\}, \{\text{zero}, \text{one}\}, \{\text{sum}, \text{product}\}, \{\text{Odd}, \text{Even}\} \rangle$ mit $ar(\text{sum}) = ar(\text{product}) = 2$ und $ar(\text{Odd}) = ar(\text{Even}) = 1$.

Bemerkung: Für die Formalisierung einer Aussage spielt es keine Rolle, ob die Aussage im Bezug auf die übliche Interpretation wahr ist.

- (a) Es gibt keine zwei aufeinanderfolgende Zahlen, deren Produkt ungerade ist.
- (b) Das Quadrat einer geraden Zahl ist immer ungerade.

Aufgabe 12.3 (3 Punkte)

Betrachten Sie die folgende prädikatenlogische Formel φ über der Signatur $\langle \{x, y\}, \{c\}, \{f, g\}, \{P\} \rangle$:

$$\varphi = (\neg P(c) \wedge \forall x \exists y ((f(y) = g(x)) \wedge P(y)))$$

Geben Sie ein Modell $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ von φ an und *beweisen* Sie, dass $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt. Warum benötigt man keine Variablenbelegung α , um ein Modell von φ anzugeben?

Hinweis: Beachten Sie, dass der Beweis die Mehrheit der Punkte ausmacht, achten Sie also auf einen sauberen Beweis.

Aufgabe 12.4 (1 Punkt)

Betrachten Sie die Formel φ über der Signatur $\langle \{x, y, z\}, \{c\}, \{f\}, \{P, Q, R\} \rangle$ mit $ar(f) = ar(P) = 1$, $ar(Q) = 2$ und $ar(R) = 3$.

$$\varphi = (\forall x \exists y (P(z) \rightarrow Q(y, x)) \vee \neg \exists y R(c, x, f(y)))$$

Markieren Sie die freien Variablenvorkommen in φ . Geben Sie *zusätzlich* die Menge der freien Variablen von φ an (ohne Beweis).

Aufgabe 12.5 (1 Punkt)

Ist $\varphi = (\text{sum}(\text{zero}, \text{zero}) = \text{zero})$ über der Signatur $\langle \emptyset, \{\text{zero}\}, \{\text{sum}\}, \emptyset \rangle$ mit $ar(\text{sum}) = 2$ allgemeingültig? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Aufgabe 12.6 (2 Punkte)

Widerlegen Sie die folgende Aussage: Für alle Formeln φ and ψ gilt $(\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \models \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Regeln zur Abgabe:

Als Abgabe ist nur eine einzelne PDF-Datei (endend auf .pdf), welche mit L^AT_EX generiert wurde, zugelassen. Die Namen aller Gruppenmitglieder müssen oben auf der ersten Seite stehen. Die Seiten müssen entweder nummeriert sein, oder die Namen der Gruppenmitglieder müssen auf jeder Seite stehen. Die PDF-Datei muss im A4-Format sein (der Inhalt muss auf einen A4-Ausdruck passen).