Discrete Mathematics in Computer Science

M. Helmert, G. Röger
S. Eriksson
Herbstsemester 2021

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 5

Abgabe: Donnerstag, 28. Oktober 2021

Aufgabe 5.1 (2 Punkte)

Geben Sie eine partielle Funktion $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \nrightarrow \{u, v, w, x, y, z\}$ an, welche *alle* der folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $|\mathrm{dom}(f)| = 5$ (ii) $\mathrm{img}(f) = \{u, v, x, z\}$
(iii) $f^{-1}[\{u, v, w\}] = \{1, 2, 4\}$ (iv) $f|_{\{2,3,4\}}$ ist eine totale Funktion.

Sie können Ihre Funktion entweder durch explizites Auflisten des Mappings oder mithilfe eines Graphen angeben.

Aufgabe 5.2 (2 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage:
Für $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gilt, dass falls die Komposition $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

Aufgabe 5.3 (2 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe eines Beispiels, dass es Mengen A, B, C und Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gibt, so dass weder f noch g bijektiv sind, aber $g \circ f$ ist bijektiv.
Hinweis: Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 5.2 um sich zu überlegen, welche Eigenschaften f und g haben müssen.

Aufgabe 5.4 (3 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_1$, betrachten Sie die Menge $S_n = \{0, \ldots, 2n - 1\}$ und die folgende Permutation:

$$\pi_n(i) = \begin{cases} i + 2 \mod 2n & \text{falls } i \text{ gerade ist} \\ i - 4 \mod 2n & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Beschreiben Sie π_4 in der Zweireihen- und Zyklennotation.

(b) Berechnen Sie $\sigma\pi_3$ mit $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ in Zweireihennotation.

(c) Beschreiben Sie $\pi_5^{-1}\pi_5^{-1}$ in der Einliniennotation.

Aufgabe 5.5 (1 Punkt)

Betrachten Sie eine Permutation π über einer Menge S welche aus n disjunkten Zyklen mit Längen m_i für alle $1 \leq i \leq n$ besteht. Wie oft müssen Sie die Permutation anwenden, so dass wieder die Startkonfiguration resultiert? In anderen Worten, für welches $k > 0$ gilt $\pi^k(x) = x$ für alle $x \in S$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst den Fall mit nur einem Zyklus.

Regeln zur Abgabe:
Als Abgabe ist nur eine einzelne PDF Datei (endend auf .pdf) welche mit LaTeX generiert wurde zugelassen. Die Namen aller Gruppenmitglieder müssen oben auf der ersten Seite stehen. Die Seiten müssen entweder nummeriert sein oder die Namen der Gruppenmitglieder müssen auf jeder Seite stehen. Die PDF muss im A4 Format sein (der Inhalt muss auf einen A4 Ausdruck passen).