Discrete Mathematics in Computer Science

M. Helmert, G. Röger
S. Eriksson
Herbstsemester 2021

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 2

Abgabe: Donnerstag, 7. Oktober 2021

Aufgabe 2.1 (1 Punkt)

Wir wollen zeigen, dass alle Tukane gleich lange Schnäbel haben. In welcher Zeile des folgenden Induktionsbeweises ist ein Fehler? Was ist, formal gesehen, der Fehler?

1. Da wir die genaue Zahl von Tukanen nicht kennen, beweisen wir, dass für jede Menge von Tukanen alle Tukane in der Menge gleich lange Schnäbel haben.
2. Wir definieren die Eigenschaft $T(n)$: In einer beliebigen Menge von n Tukanen haben alle Tukane gleich lange Schnäbel.
3. Als Induktionsanfang zeigen wir $T(1)$.
4. In einer Menge mit nur einem Tukan haben offensichtlich alle Tukane gleich lange Schnäbel, also gilt $T(1)$.
5. Als Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, dass $T(i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.
6. Unter dieser Voraussetzung müssen wir im Induktionsschritt zeigen, dass $T(n+1)$ gilt.
7. Wir betrachten eine Menge von $n+1$ Tukanen $M = \{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}\}$.
8. Wenn wir den ersten Tukan aus der Menge M entfernen, enthält die resultierende Menge n Tukane: $M_1 = \{t_2, \ldots, t_{n+1}\}, |M_1| = n$.
9. Für M_1 gilt nach Induktionsvoraussetzung $T(n)$ und wir folgern, dass alle Tukane in M_1 gleich lange Schnäbel haben.
10. Wenn wir den letzten Tukan aus der Menge M entfernen, enthält die resultierende Menge n Tukane: $M_2 = \{t_1, \ldots, t_n\}, |M_2| = n$.
11. Für M_2 gilt nach Induktionsvoraussetzung $T(n)$ und wir folgern, dass alle Tukane in M_2 gleich lange Schnäbel haben.
12. Wir betrachten einen Tukan t_M, die in beiden Mengen ist, zum Beispiel $t_M = t_2$.
13. t_M hat einen gleich langen Schnabel wie alle Tukane aus M_1 und wie alle Tukane aus M_2.
14. Daher müssen alle Tukane aus $M_1 \cup M_2 = M$ einen gleich langen Schnabel haben, d.h. wir haben für M die Aussage $T(n+1)$ gezeigt.
15. Da $T(1)$ gilt und unter der Annahme $T(n)$ auch $T(n+1)$ für $n \geq 1$ gilt, folgern wir, dass $T(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
16. Insbesondere gilt $T(n)$ für die Menge aller Tukane, d.h. alle Tukane haben gleich lange Schnäbel.

Aufgabe 2.2 (3 Punkte)
Wir betrachten die Menge $\mathcal{B}$ der binären Bäume, welche induktiv wie folgt definiert ist:

- $\square$ ist ein binärer Baum.
- Falls L und R binäre Bäume sind, so ist $\langle L, \bigcirc, R \rangle$ ein binärer Baum.

Für einen gegebenen binären Baum B definieren wir seine Anzahl Blätter mit

$$\begin{aligned} \mathit{leaves}(\square) &= 1 \\ \mathit{leaves}(\langle L, \bigcirc, R \rangle) &= \mathit{leaves}(L) + \mathit{leaves}(R) \end{aligned}$$

,
und seine Anzahl Kanten mit

$$\begin{aligned} \mathit{edges}(\square) &= 0 \\ \mathit{edges}(\langle L, \bigcirc, R \rangle) &= \mathit{edges}(L) + \mathit{edges}(R) + 2 \end{aligned}$$

Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass für alle binären Bäume B die Aussage $\mathit{edges}(B) = 2 \cdot \mathit{leaves}(B) - 2$ gilt.

Aufgabe 2.3 (1 Punkt)
Die folgenden Mengendefinitionen sind syntaktisch fehlerhaft. Geben sie die korrekte Syntax an.

(a) Die Menge aller Zahlen die entweder das Quadrat oder die Kubikzahl einer natürlichen Zahl sind: $\{x^2, x^3 \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

(b) Die Menge aller geraden Zahlen zusammen mit der Zahl 7: $\{2x \mid x \in \mathbb{N}_0\} \cup 7$

Aufgabe 2.4 (2 Punkte)

(a) Definieren Sie die Menge $S_1 = \{\{x, y\} \mid x \in \{1, 2, 3\}, y = 2\}$ als explizite Enumeration.

(b) Definieren Sie die Menge $S_2 = \{3, 9, 15, 21, 27, 33, \dots\}$ mit der set-builder Notation.

(c) Definieren Sie die Menge $S_3 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ induktiv.

(d) Betrachten Sie die Menge S_4, welche wie folgt induktiv definiert ist:

- $\{0\} \in S_4$,
- falls $\{x\} \in S_4$ dann $\{x + 2\} \in S_4$ und
- falls $S \in S_4$ und $S' \in S_4$ dann $(S \cup S') \in S_4$.

Beschreiben Sie S_4 in natürlicher Sprache

Aufgabe 2.5 (3 Punkte)
Wir betrachten endliche Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$. Falls A und B die folgenden Eigenschaften erfüllen, wie stehen sie dann in Relation zueinander? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
Hinweis: "kurz begründen" bedeutet, dass Sie nicht einen formalen Beweis schreiben sollen, sondern nur eine high-level Beschreibung wieso Ihre Antwort richtig ist.

(a) $|A \cap B| = |A|$

(b) $A \setminus B = B \setminus A$

(c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

Regeln zur Abgabe:
Als Abgabe ist nur eine einzelne PDF Datei (endend auf .pdf) welche mit LaTeX generiert wurde zugelassen. Die Namen aller Gruppenmitglieder müssen oben auf der ersten Seite stehen. Die Seiten müssen entweder nummeriert sein oder die Namen der Gruppenmitglieder müssen auf jeder Seite stehen. Die PDF muss im A4 Format sein (der Inhalt muss auf einen A4 Ausdruck passen).