

Algorithmen und Datenstrukturen

C7. Graphen: Ausblick

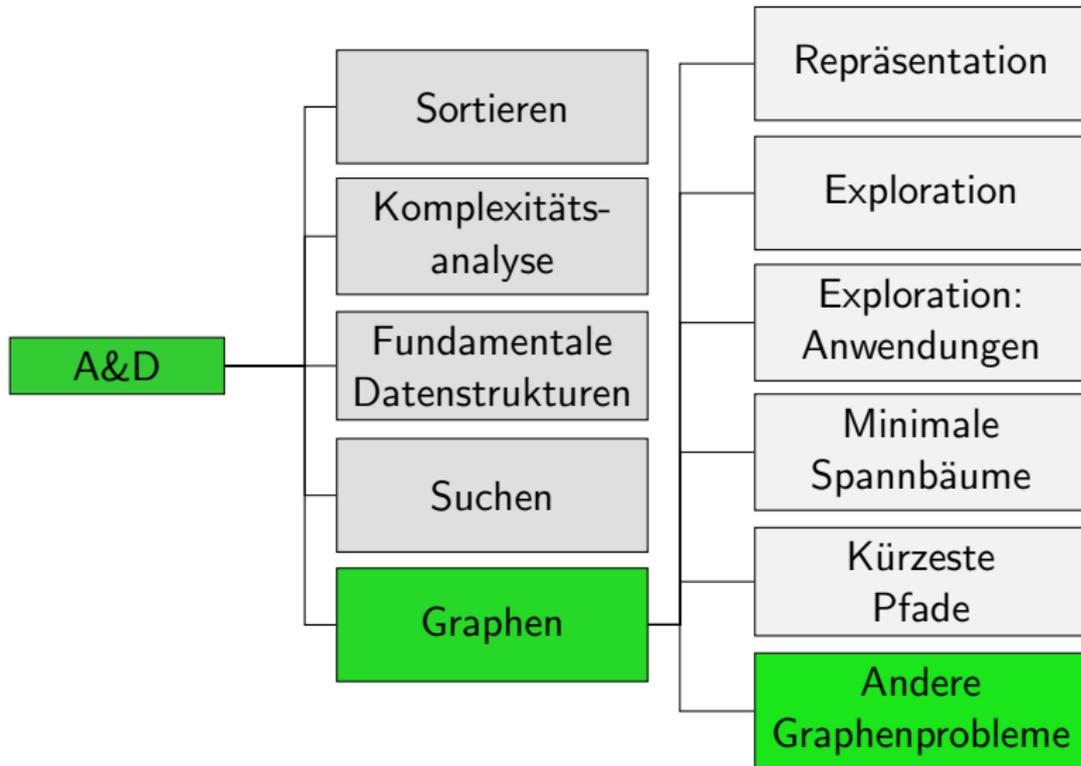
Gabriele Röger

Universität Basel

31. Mai 2023

Andere Graphenprobleme

Inhalt dieser Veranstaltung



Crashkurs Komplexitätstheorie

- **Entscheidungsprobleme:** Ja/Nein-Antwort gesucht
Gegeben gewichteter Graph, Knoten s , t und Zahl K .
Gibt es einen Pfad von s nach t mit Kosten höchstens K ?
- **Suchprobleme:** tatsächliche Lösung gesucht
Gegeben gewichteter Graph und Knoten s , t .
Finde einen kürzesten Pfad von s nach t .

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

- **P**: Entscheidungsprobleme, die man mit einem **polynomiellen Algorithmus** (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) **lösen** kann.

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

- **P**: Entscheidungsprobleme, die man mit einem **polynomiellen Algorithmus** (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) **lösen** kann.
- **NP**: Entscheidungsprobleme, bei denen man einen Beweis für eine Ja-Antwort des Entscheidungsproblems **in polynomieller Zeit verifizieren kann**.
Beweis: z.B. konkreter Pfad mit Kosten $\leq K$

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

- **P**: Entscheidungsprobleme, die man mit einem **polynomiellen Algorithmus** (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) **lösen** kann.
- **NP**: Entscheidungsprobleme, bei denen man einen Beweis für eine Ja-Antwort des Entscheidungsproblems **in polynomieller Zeit verifizieren kann**.
Beweis: z.B. konkreter Pfad mit Kosten $\leq K$
- **P \neq NP?** Wir wissen es nicht.

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

- **P**: Entscheidungsprobleme, die man mit einem **polynomiellen Algorithmus** (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) **lösen** kann.
- **NP**: Entscheidungsprobleme, bei denen man einen Beweis für eine Ja-Antwort des Entscheidungsproblems **in polynomieller Zeit verifizieren kann**.
Beweis: z.B. konkreter Pfad mit Kosten $\leq K$
- **$P \neq NP$?** Wir wissen es nicht.
- **NP-schwere Probleme**: Probleme, die mindestens so schwierig sind, wie die schwierigsten Probleme in NP.
→ keine polynomiellen Verfahren bekannt.

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

- **P**: Entscheidungsprobleme, die man mit einem **polynomiellen Algorithmus** (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) **lösen** kann.
- **NP**: Entscheidungsprobleme, bei denen man einen Beweis für eine Ja-Antwort des Entscheidungsproblems **in polynomieller Zeit verifizieren kann**.
Beweis: z.B. konkreter Pfad mit Kosten $\leq K$
- **$P \neq NP$?** Wir wissen es nicht.
- **NP-schwere Probleme**: Probleme, die mindestens so schwierig sind, wie die schwierigsten Probleme in NP.
→ keine **polynomiellen Verfahren** bekannt.
- **NP-vollständige** Entscheidungsprobleme: NP-schwer & in NP

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

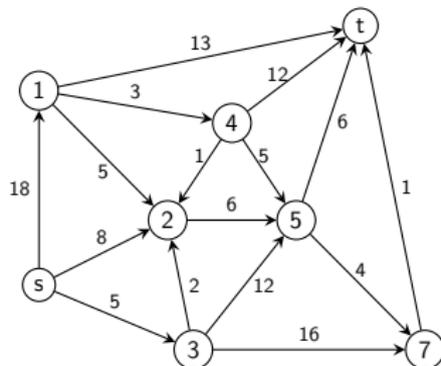
- **P**: Entscheidungsprobleme, die man mit einem **polynomiellen Algorithmus** (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) **lösen** kann.
- **NP**: Entscheidungsprobleme, bei denen man einen Beweis für eine Ja-Antwort des Entscheidungsproblems **in polynomieller Zeit verifizieren kann**.
Beweis: z.B. konkreter Pfad mit Kosten $\leq K$
- **$P \neq NP$?** Wir wissen es nicht.
- **NP-schwere Probleme**: Probleme, die mindestens so schwierig sind, wie die schwierigsten Probleme in NP.
→ keine **polynomiellen Verfahren** bekannt.
- **NP-vollständige** Entscheidungsprobleme: NP-schwer & in NP
- **NP-äquivalente** Suchprobleme: zugehöriges Entscheidungsproblem NP-vollständig

Flüsse in Graphen I

Definition (Flussnetzwerk)

Ein **Flussnetzwerk** $N = (G, s, t, k)$ ist gegeben durch

- einen **gerichteten Graphen** $G = (V, E)$,
- einer **Quelle** (source) $s \in V$,
- einer **Senke** (target) $t \in V$, und
- einer **Kapazitätsfunktion** $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+^\infty$.



Flüsse in Graphen II

Definition (Fluss)

Ein **s-t-Fluss** f weist jeder Kante einen Wert aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zu, wobei

- der **Flusswert** die **Kapazität** der Kante **nicht übersteigt**:

$$f(e) \leq k(e) \text{ für alle } e \in E$$

Flüsse in Graphen II

Definition (Fluss)

Ein **s-t-Fluss** f weist jeder Kante einen Wert aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zu, wobei

- der **Flusswert** die **Kapazität** der Kante **nicht übersteigt**:

$$f(e) \leq k(e) \text{ für alle } e \in E$$

- bei allen Knoten ausser der Quelle und der Senke **genauso viel hinein wie hinaus** fließt:

$$\sum_{\substack{(u,w) \in E \\ w=v}} f((u,w)) = \sum_{\substack{(u,w) \in E \\ u=v}} f((u,w)) \text{ für alle } v \in V \setminus \{s, t\}$$

Flüsse in Graphen II

Definition (Fluss)

Ein **s-t-Fluss** f weist jeder Kante einen Wert aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zu, wobei

- der **Flusswert** die **Kapazität** der Kante **nicht übersteigt**:

$$f(e) \leq k(e) \text{ für alle } e \in E$$

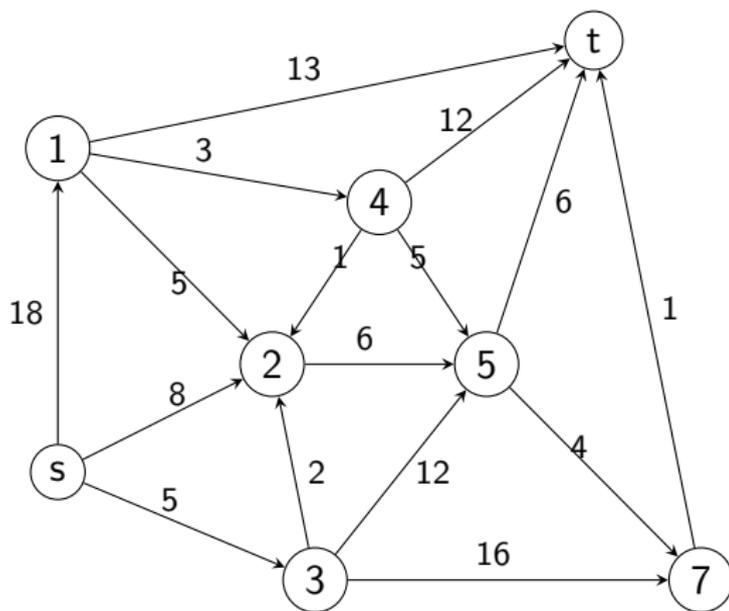
- bei allen Knoten ausser der Quelle und der Senke **genauso viel hinein wie hinaus** fliesst:

$$\sum_{\substack{(u,w) \in E \\ w=v}} f((u,w)) = \sum_{\substack{(u,w) \in E \\ u=v}} f((u,w)) \text{ für alle } v \in V \setminus \{s, t\}$$

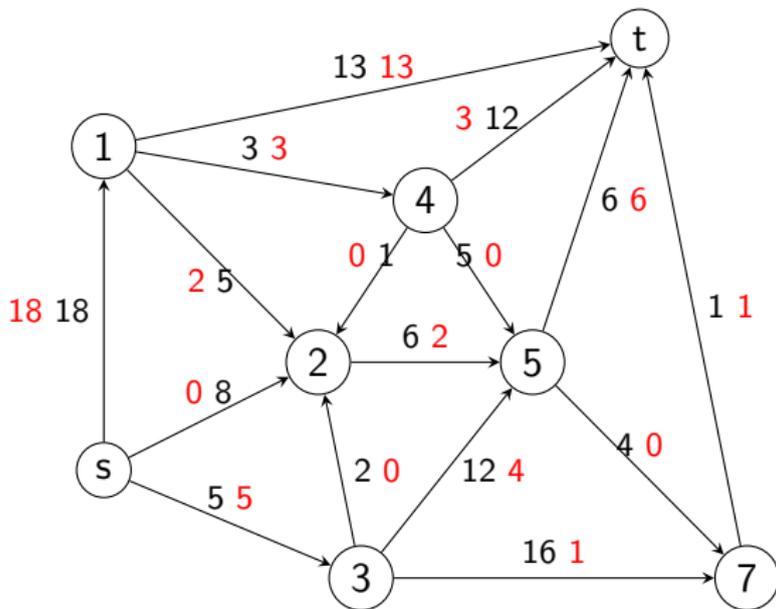
Der **Wert** des Flusses ist der Überschuss in der Senke:

$$|f| = \sum_{\substack{(u,w) \in E \\ w=t}} f((u,w)) - \sum_{\substack{(u,w) \in E \\ u=t}} f((u,w))$$

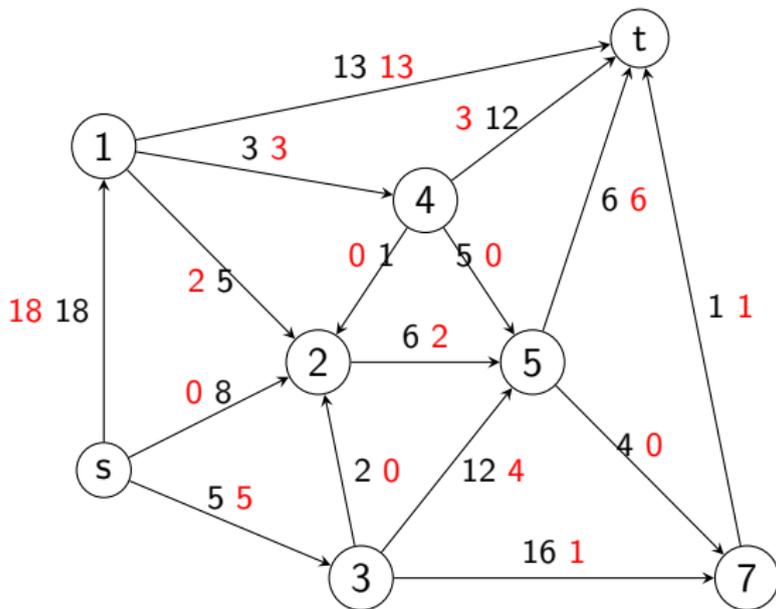
Beispiel



Beispiel

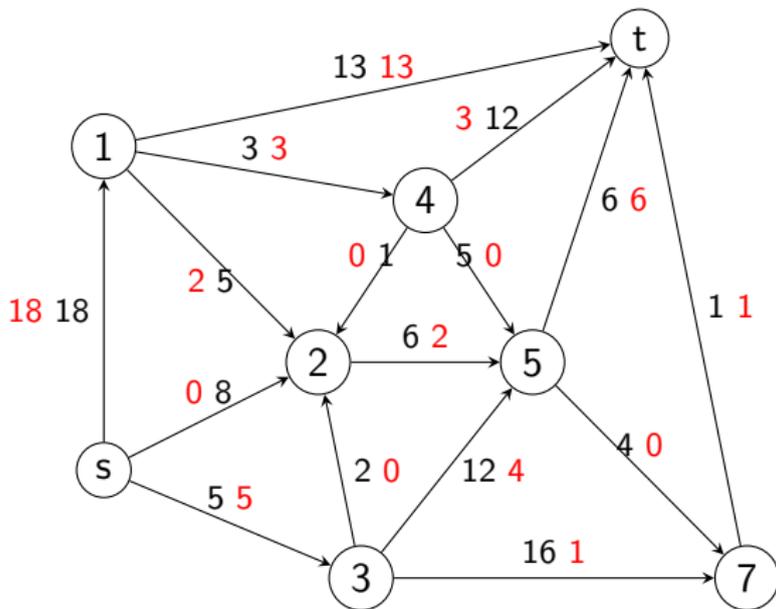


Beispiel



Wie schwer ist es, einen maximalen Fluss zu finden?

Beispiel

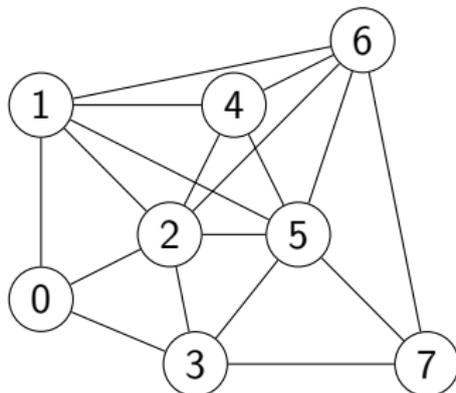


Wie schwer ist es, einen maximalen Fluss zu finden?
z.B. mit Edmonds-Karp-Algorithmus in $O(|E|^2|V|)$

Cliquen

Definition (Clique)

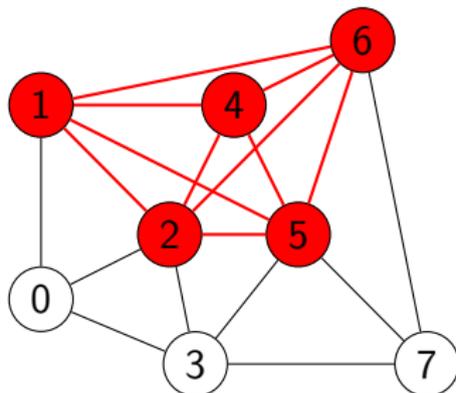
Eine **Clique** in einem ungerichteten Graphen (V, E) ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ der Knoten, bei der jedes Knotenpaar durch eine Kante verbunden ist: für $u, v \in C$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \in E$.



Cliquen

Definition (Clique)

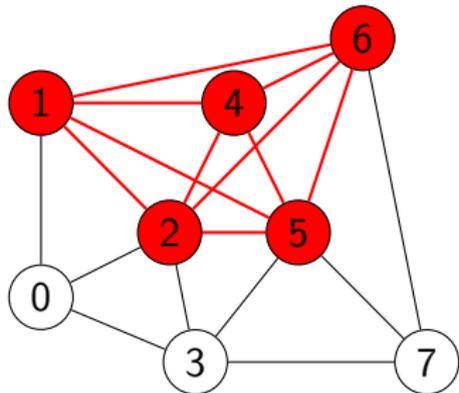
Eine **Clique** in einem ungerichteten Graphen (V, E) ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ der Knoten, bei der jedes Knotenpaar durch eine Kante verbunden ist: für $u, v \in C$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \in E$.



Cliquen

Definition (Clique)

Eine **Clique** in einem ungerichteten Graphen (V, E) ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ der Knoten, bei der jedes Knotenpaar durch eine Kante verbunden ist: für $u, v \in C$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \in E$.

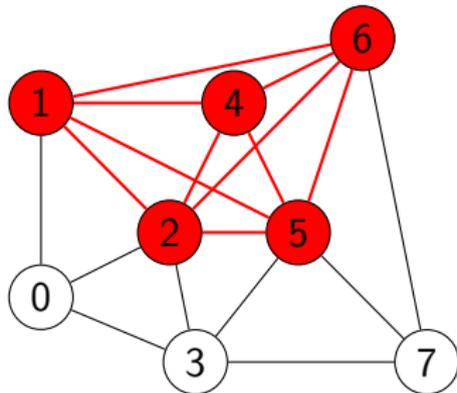


Wie schwer ist es, eine grösste Clique in einem Graphen zu finden?

Cliquen

Definition (Clique)

Eine **Clique** in einem ungerichteten Graphen (V, E) ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ der Knoten, bei der jedes Knotenpaar durch eine Kante verbunden ist: für $u, v \in C$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \in E$.



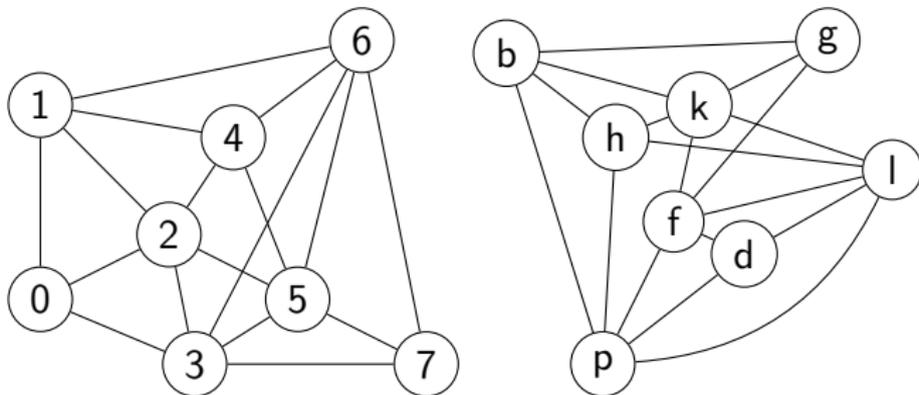
Wie schwer ist es, eine grösste Clique in einem Graphen zu finden?

NP-äquivalent

Graphenisomorphie

Definition (Graphenisomorphie)

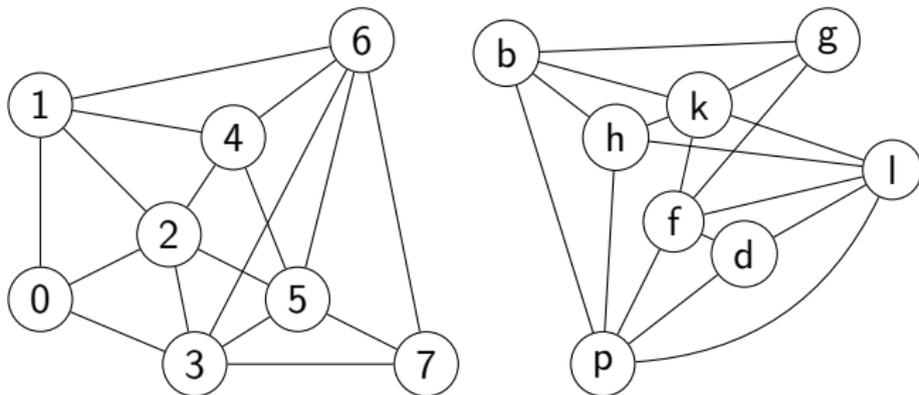
Zwei Graphen sind **isomorph**, wenn sie bis auf die Namen der Knoten gleich sind.



Graphenisomorphie

Definition (Graphenisomorphie)

Zwei Graphen sind **isomorph**, wenn sie bis auf die Namen der Knoten gleich sind.

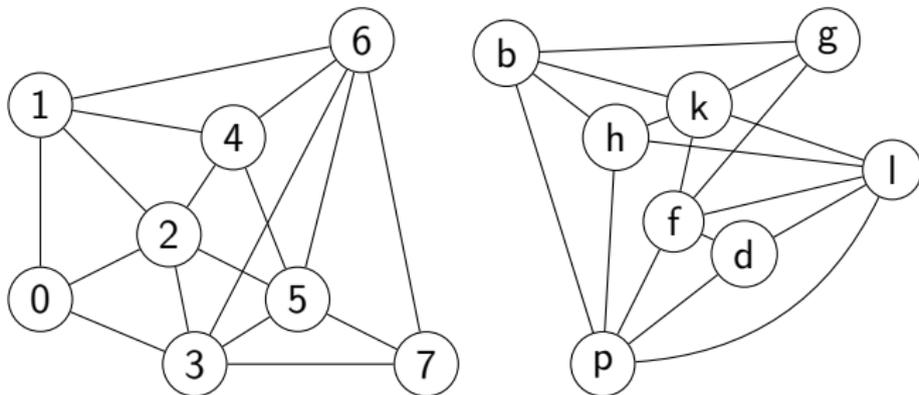


Wie schwer ist es zu entscheiden, ob zwei Graphen isomorph sind?

Graphenisomorphie

Definition (Graphenisomorphie)

Zwei Graphen sind **isomorph**, wenn sie bis auf die Namen der Knoten gleich sind.



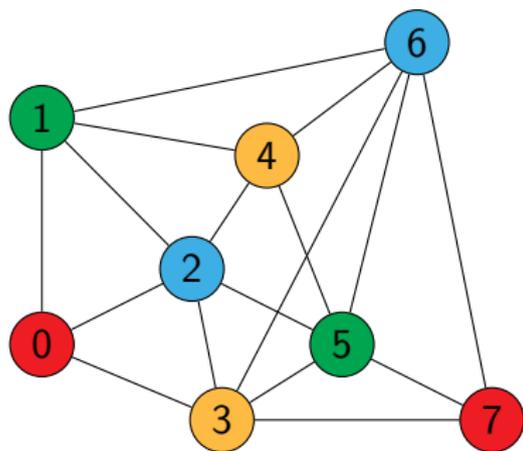
Wie schwer ist es zu entscheiden, ob zwei Graphen isomorph sind?

In NP, aber unbekannt ob in P und/oder NP-vollständig

Färbbarkeit

Definition (k -Färbbarkeit)

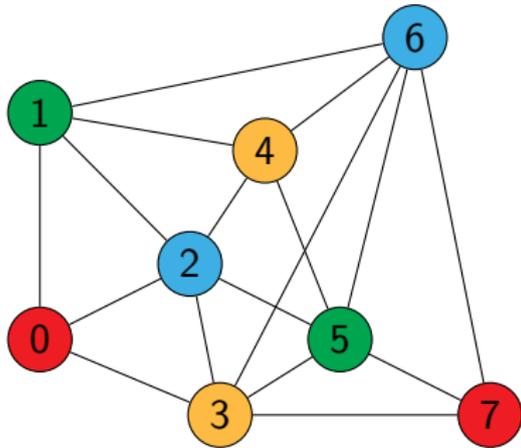
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist **k -färbbar** ($k \in \mathbb{N}$), falls es eine Färbung $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ gibt, so dass für alle $\{v, w\} \in E$ gilt: $f(v) \neq f(w)$.



Färbbarkeit

Definition (k -Färbbarkeit)

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist **k -färbbar** ($k \in \mathbb{N}$), falls es eine Färbung $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ gibt, so dass für alle $\{v, w\} \in E$ gilt: $f(v) \neq f(w)$.

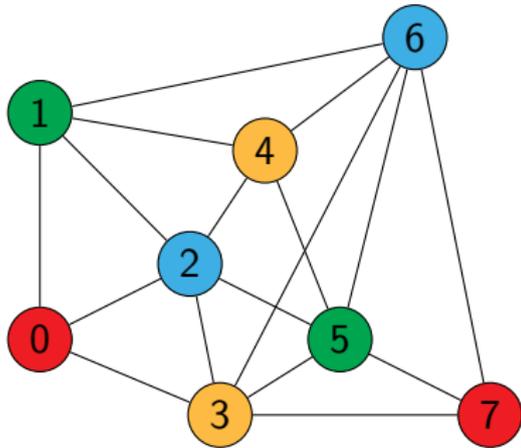


Wie schwer ist es zu entscheiden, ob ein gegebener Graph k -färbbar ist?

Färbbarkeit

Definition (k -Färbbarkeit)

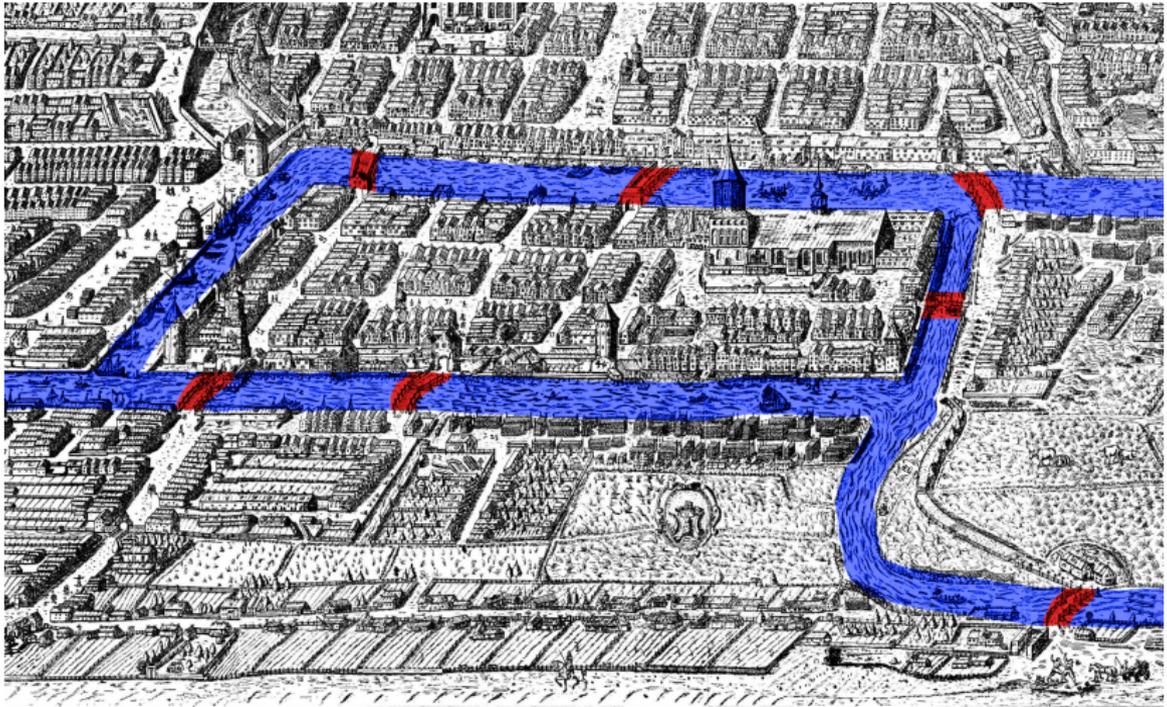
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist **k -färbbar** ($k \in \mathbb{N}$), falls es eine Färbung $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ gibt, so dass für alle $\{v, w\} \in E$ gilt: $f(v) \neq f(w)$.



Wie schwer ist es zu entscheiden, ob ein gegebener Graph k -färbbar ist?

NP-vollständig

Königsberger Brückenproblem

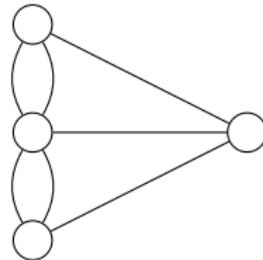
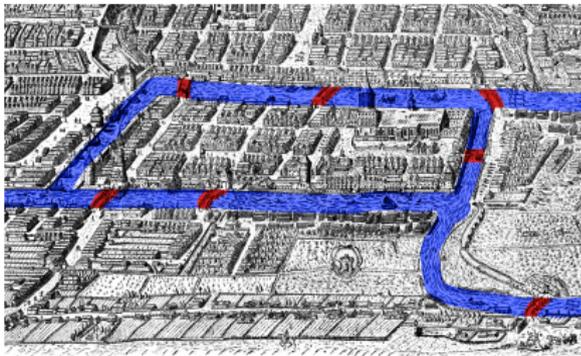


Gibt es einen Rundweg, der jede Brücke exakt einmal verwendet?

Eulerkreis

Definition (Eulerkreis)

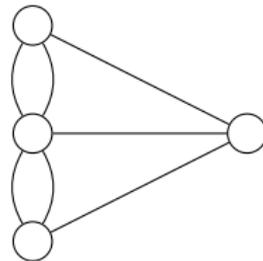
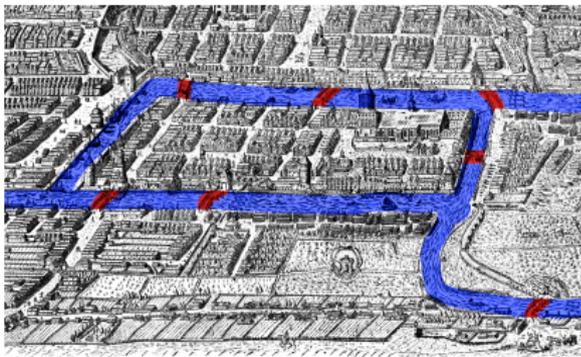
Ein **Eulerkreis** in einem Graphen ist ein Zyklus, der jede Kante genau einmal enthält.



Eulerkreis

Definition (Eulerkreis)

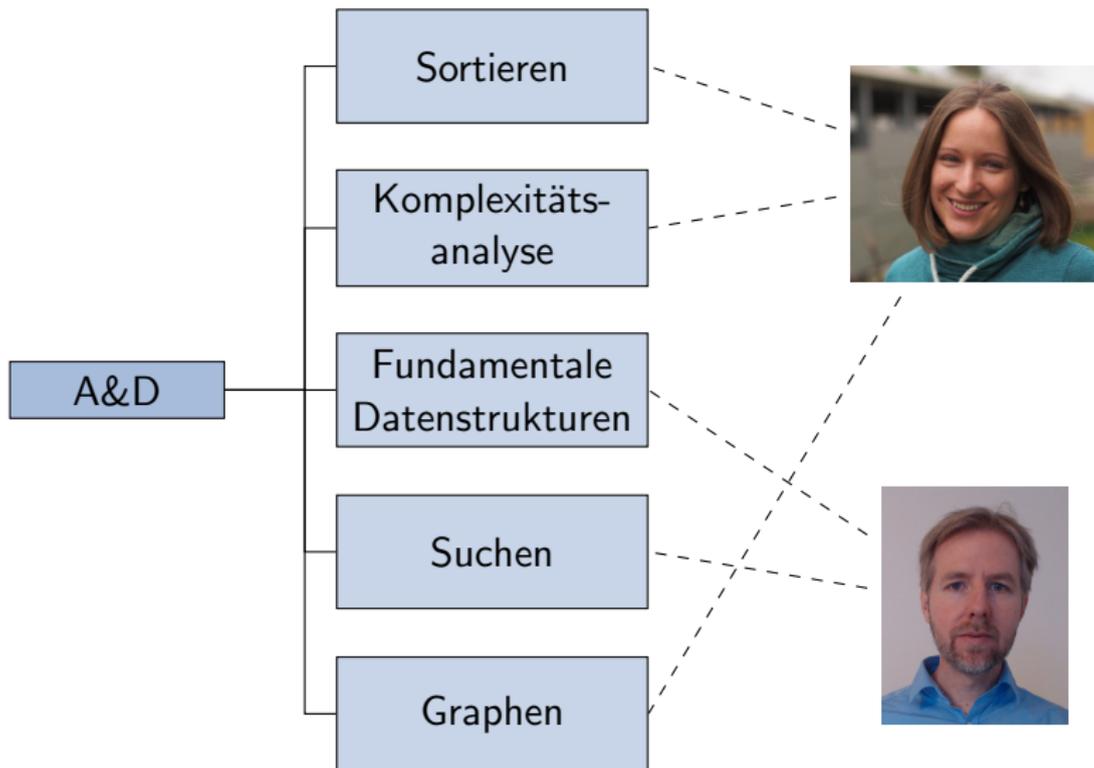
Ein **Eulerkreis** in einem Graphen ist ein Zyklus, der jede Kante genau einmal enthält.



Wie schwer ist es zu entscheiden, ob ein Graph einen Eulerkreis hat?

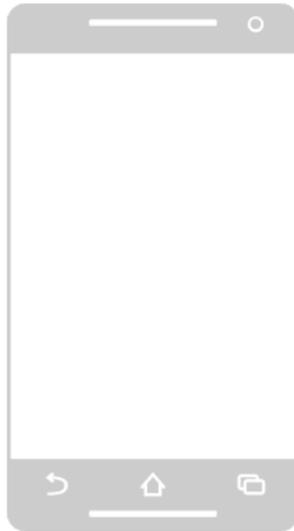
Hat Eulerkreis gdw. jeder Knoten geraden Grad hat und Graph verbunden ist.

Inhalt dieser Veranstaltung



Quiz

Quiz



kahoot.it