

Algorithmen und Datenstrukturen

C6. Kürzeste Pfade: Algorithmen

Gabriele Röger

Universität Basel

25. Mai 2023

Informatiker des Tages: Edsger Dijkstra



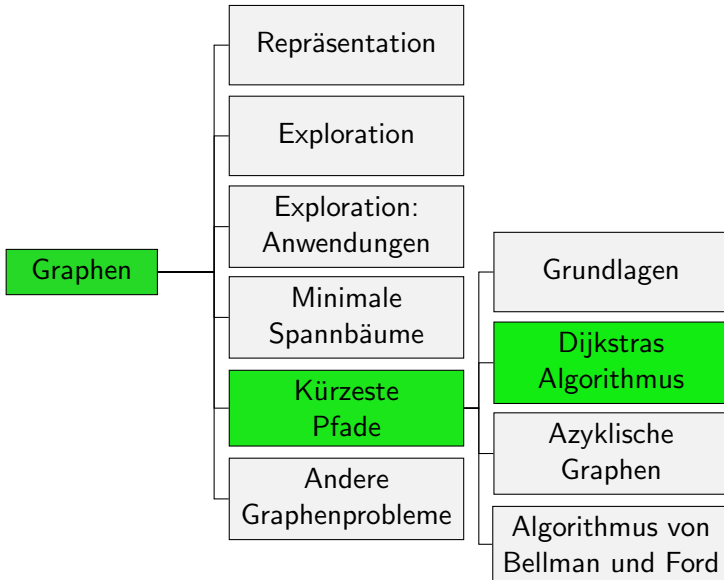
Edsger Dijkstra

- Niederländischer Mathematiker, 1930–2002
- Verfechter und Mitentwickler der **strukturierten Programmierung**
 - beteiligt am Entwurf von Algol 60
 - 1968: Aufsatz „**Go To Statement Considered Harmful**“
- 1959: **Kürzester-Pfade-Algorithmus**
- Gewinner **Turing Award** (1972)

„Do only what only you can do.“

Dijkstras Algorithmus

Graphen: Übersicht



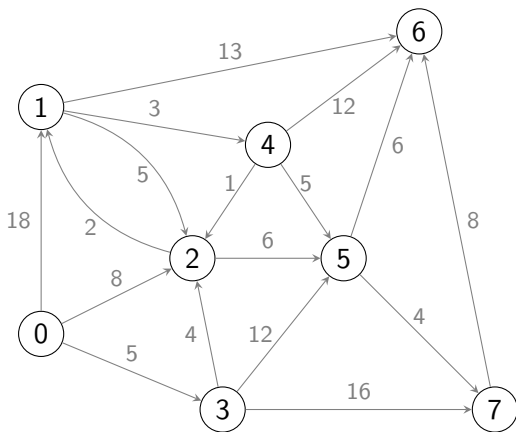
Dijkstras Algorithmus: High-Level-Perspektive

Algorithmus von Dijkstra (für **nicht-negative** Kantengewichte)

Baue Kürzeste-Pfade-Baum ausgehend von Startknoten s auf:

- Betrachte Knoten (die noch nicht im Baum sind) in aufsteigender Reihenfolge ihres Abstandes von s .
- Nimm Knoten in Baum auf und relaxiere ausgehende Kanten.

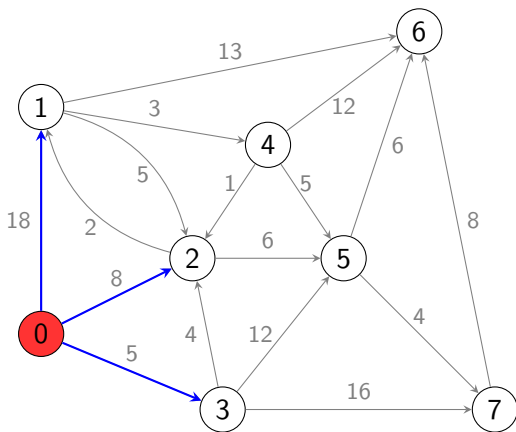
Dijkstras Algorithmus: Illustration



distance

0	0
1	∞
2	∞
3	∞
4	∞
5	∞
6	∞
7	∞

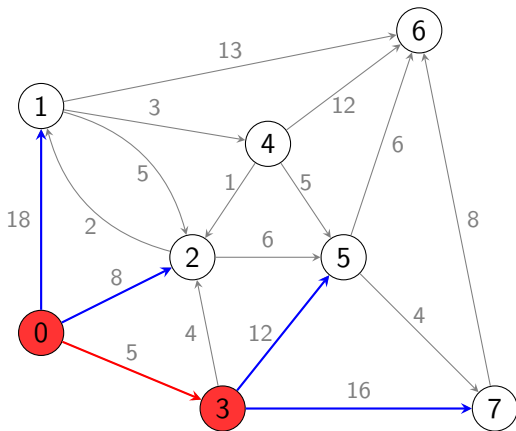
Dijkstras Algorithmus: Illustration



distance

0	0
1	18
2	8
3	5
4	∞
5	∞
6	∞
7	∞

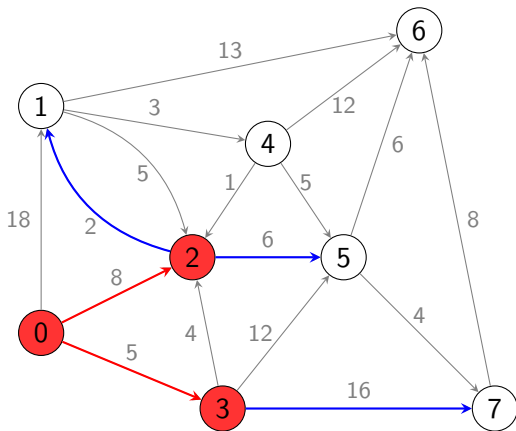
Dijkstras Algorithmus: Illustration



distance

0	0
1	18
2	8
3	5
4	∞
5	17
6	∞
7	21

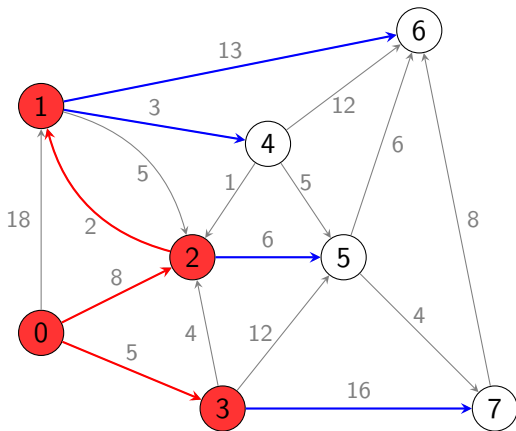
Dijkstras Algorithmus: Illustration



distance

0	0
1	10
2	8
3	5
4	∞
5	14
6	∞
7	21

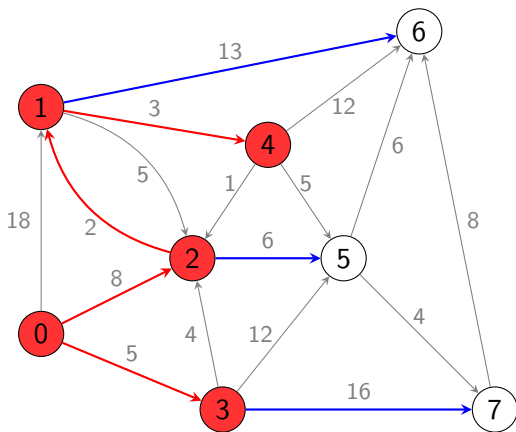
Dijkstras Algorithmus: Illustration



distance

0	0
1	10
2	8
3	5
4	13
5	14
6	23
7	21

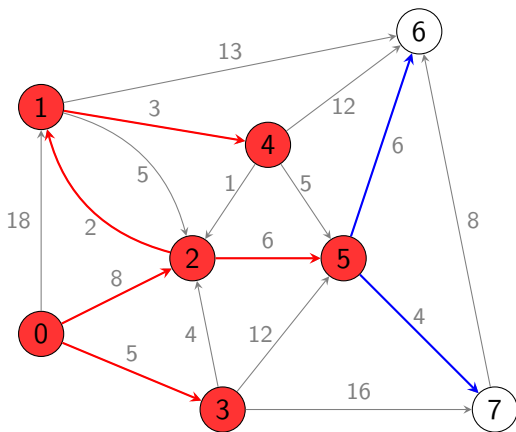
Dijkstras Algorithmus: Illustration



distance

0	0
1	10
2	8
3	5
4	13
5	14
6	23
7	21

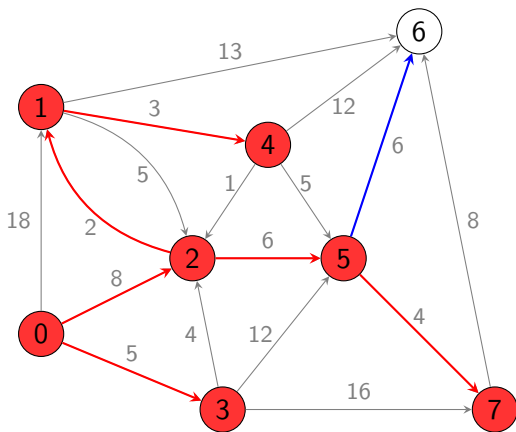
Dijkstras Algorithmus: Illustration



distance

0	0
1	10
2	8
3	5
4	13
5	14
6	20
7	18

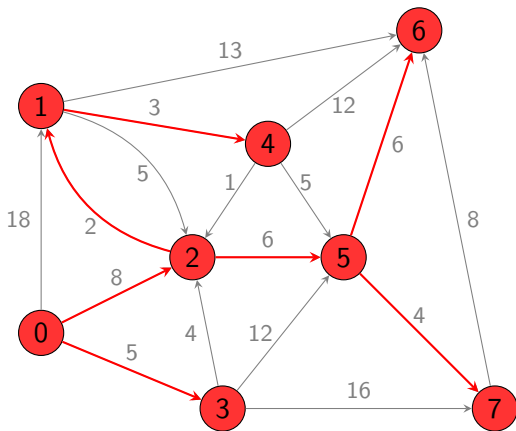
Dijkstras Algorithmus: Illustration



distance

0	0
1	10
2	8
3	5
4	13
5	14
6	20
7	18

Dijkstras Algorithmus: Illustration



distance

0	0
1	10
2	8
3	5
4	13
5	14
6	20
7	18

Datenstrukturen

- **edge_to**: knotenindiziertes Array, das an Stelle v die letzte Kante des kürzesten bekannten Pfades enthält.

Datenstrukturen

- **edge_to**: knotenindiziertes Array, das an Stelle v die letzte Kante des kürzesten bekannten Pfades enthält.
- **distance**: knotenindiziertes Array, das an Stelle v die Kosten des kürzesten bekannten Pfades vom Startknoten zu v enthält.

Datenstrukturen

- **edge_to**: knotenindiziertes Array, das an Stelle v die letzte Kante des kürzesten bekannten Pfades enthält.
- **distance**: knotenindiziertes Array, das an Stelle v die Kosten des kürzesten bekannten Pfades vom Startknoten zu v enthält.
- **pq**: indizierte Priority-Queue von Knoten
 - Knoten noch nicht im Baum
 - Bereits ein Pfad zu dem Knoten bekannt
 - Sortiert nach Kosten des kürzesten bekannten Pfades zu dem Knoten.

Dijkstras Algorithmus

```
1 class DijkstraSSSP:
2     def __init__(self, graph, start_node):
3         self.edge_to = [None] * graph.no_nodes()
4         self.distance = [float('inf')] * graph.no_nodes()
5         pq = IndexMinPQ()
6         self.distance[start_node] = 0
7         pq.insert(start_node, 0)
8         while not pq.empty():
9             self.relax(graph, pq.del_min(), pq)
10
11     def relax(self, graph, v, pq):
12         for edge in graph.adjacent_edges(v):
13             w = edge.to_node()
14             if self.distance[v] + edge.weight() < self.distance[w]:
15                 self.edge_to[w] = edge
16                 self.distance[w] = self.distance[v] + edge.weight()
17                 if pq.contains(w):
18                     pq.change(w, self.distance[w])
19                 else:
20                     pq.insert(w, self.distance[w])
```

Korrektheit

Theorem

*Dijkstras Algorithmus löst das **Single-Source-Shortest-Paths-Problem** in Digraphen mit **nicht-negativen Gewichten**.*

Beweis.

- Ist v von Startknoten erreichbar, wird jede ausgehende Kante $e = (v, w)$ genau einmal relaxiert (wenn v relaxiert wird).
- Dann gilt $distance[w] \leq distance[v] + weight(e)$.
- Ungleichung bleibt erfüllt:
 - $distance[v]$ wird nicht mehr verändert, da Wert minimal war und es keine negativen Kantengewichte gibt.
 - $distance[w]$ wird höchstens kleiner.
- Sind alle erreichbaren Kanten relaxiert, ist Optimalitätsbedingung erfüllt.



Vergleich zu Eager Prim-Algorithmus

Dijkstras Algorithmus sehr ähnlich zu Eager Prim-Algorithmus für minimale Spannbäume

- Beide bauen sukzessive einen Baum auf
- nächster Knoten Prim: minimale Distanz zu **bisherigem Baum**.
- nächster Knoten Dijkstra: minimale Distanz vom **Startknoten**.
- `included_nodes` von Prim bei Dijkstra nicht notwendig, da bei bereits erledigten Knoten die `if`-Bedingung in Zeile 19 immer falsch ist.

Vergleich zu Eager Prim-Algorithmus

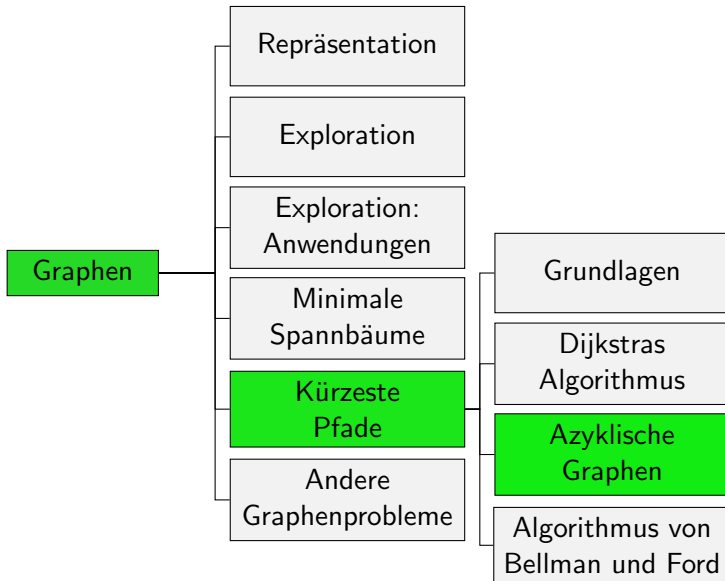
Dijkstras Algorithmus sehr ähnlich zu Eager Prim-Algorithmus für minimale Spannbäume

- Beide bauen sukzessive einen Baum auf
- nächster Knoten Prim: minimale Distanz zu **bisherigem Baum**.
- nächster Knoten Dijkstra: minimale Distanz vom **Startknoten**.
- `included_nodes` von Prim bei Dijkstra nicht notwendig, da bei bereits erledigten Knoten die `if`-Bedingung in Zeile 19 immer falsch ist.

Laufzeit $O(|E| \log |V|)$ und **Platzbedarf** $O(|V|)$ direkt übertragbar.

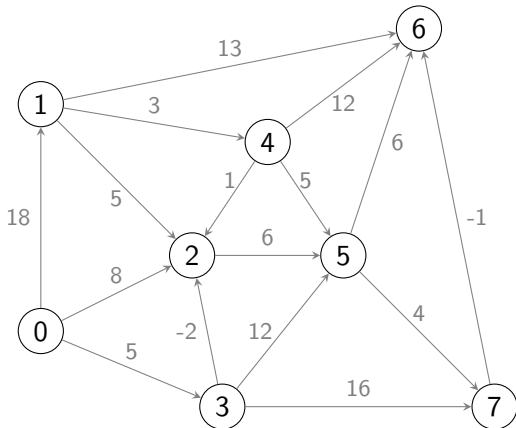
Azyklische Graphen

Graphen: Übersicht



Zykelfreiheit ausnutzen

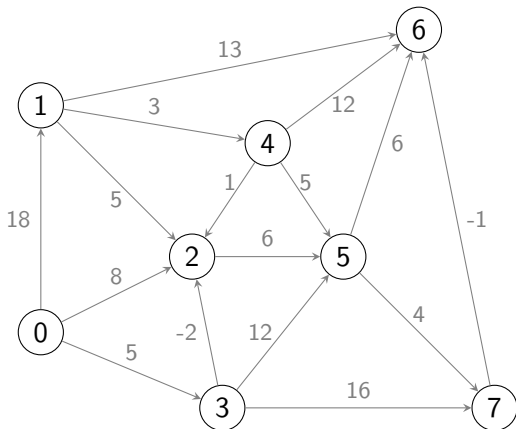
Gegeben: Azyklischer, gewichteter Digraph



Können wir die Zyklfreiheit beim Finden kürzester Pfade nutzen?

Beispiel

Idee: Relaxiere Knoten in **topologischer Reihenfolge der Startknoten**
z.B. 0, 1, 3, 4, 2, 5, 7, 6

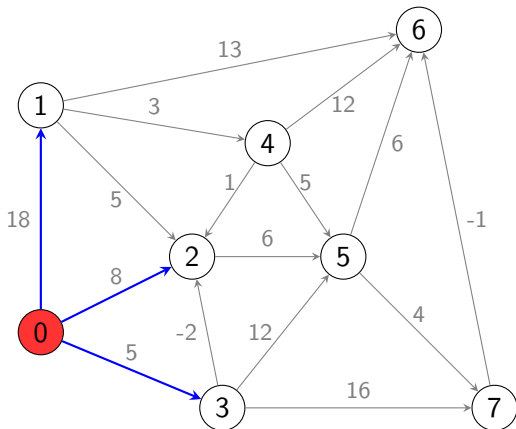


distance

0	0
1	∞
2	∞
3	∞
4	∞
5	∞
6	∞
7	∞

Beispiel

Idee: Relaxiere Knoten in **topologischer Reihenfolge der Startknoten**
z.B. 0, 1, 3, 4, 2, 5, 7, 6

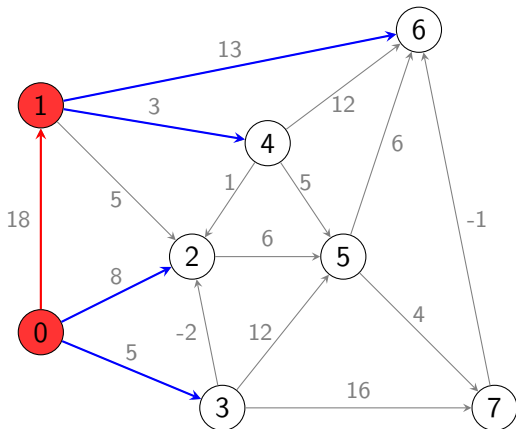


distance

0	0
1	18
2	8
3	5
4	∞
5	∞
6	∞
7	∞

Beispiel

Idee: Relaxiere Knoten in **topologischer Reihenfolge der Startknoten**
z.B. 0, 1, 3, 4, 2, 5, 7, 6

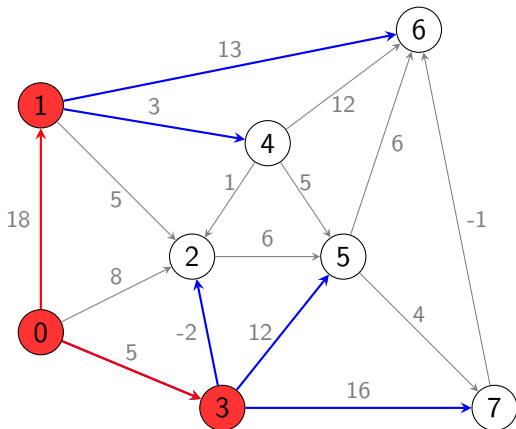


distance

0	0
1	18
2	8
3	5
4	21
5	∞
6	31
7	∞

Beispiel

Idee: Relaxiere Knoten in **topologischer Reihenfolge der Startknoten**
z.B. 0, 1, 3, 4, 2, 5, 7, 6

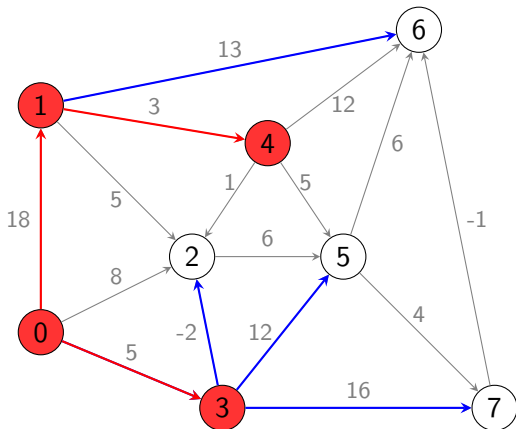


distance

0	0
1	18
2	3
3	5
4	21
5	17
6	31
7	21

Beispiel

Idee: Relaxiere Knoten in **topologischer Reihenfolge der Startknoten**
z.B. 0, 1, 3, 4, 2, 5, 7, 6

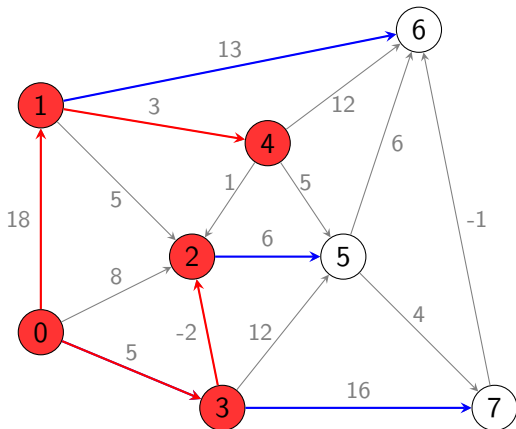


distance

0	0
1	18
2	3
3	5
4	21
5	17
6	31
7	21

Beispiel

Idee: Relaxiere Knoten in **topologischer Reihenfolge der Startknoten**
z.B. 0, 1, 3, 4, 2, 5, 7, 6

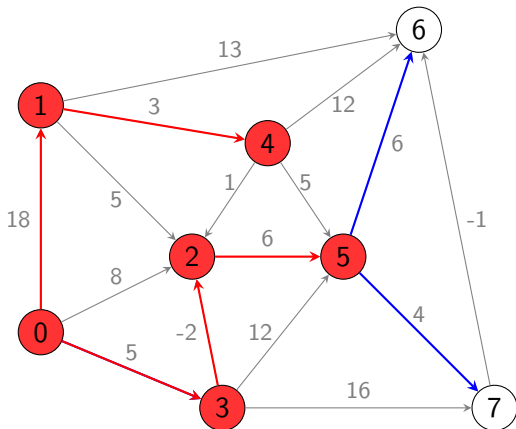


distance

0	0
1	18
2	3
3	5
4	21
5	9
6	31
7	21

Beispiel

Idee: Relaxiere Knoten in **topologischer Reihenfolge der Startknoten**
z.B. 0, 1, 3, 4, 2, 5, 7, 6

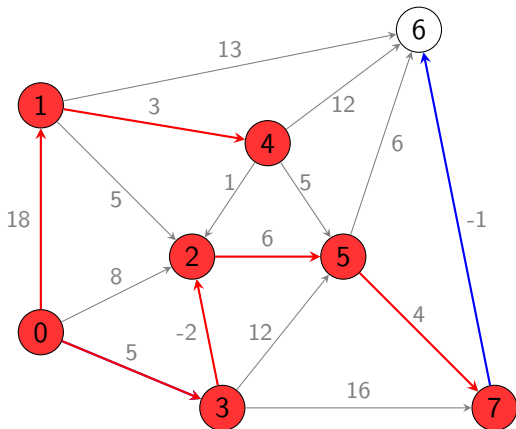


distance

0	0
1	18
2	3
3	5
4	21
5	9
6	15
7	13

Beispiel

Idee: Relaxiere Knoten in **topologischer Reihenfolge der Startknoten**
z.B. 0, 1, 3, 4, 2, 5, 7, 6

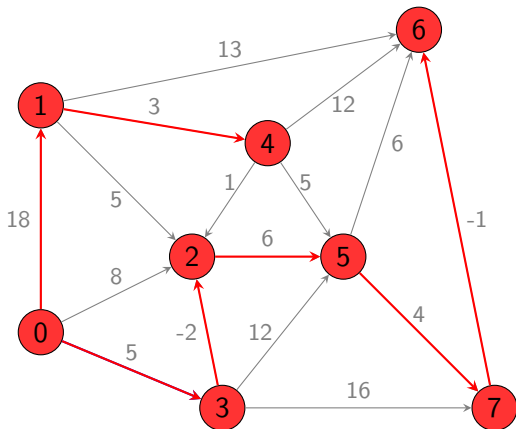


distance

0	0
1	18
2	3
3	5
4	21
5	9
6	12
7	13

Beispiel

Idee: Relaxiere Knoten in **topologischer Reihenfolge der Startknoten**
z.B. 0, 1, 3, 4, 2, 5, 7, 6



distance

0	0
1	18
2	3
3	5
4	21
5	9
6	12
7	13

Theorem

Theorem

Durch Relaxieren der Knoten in *topologischer Reihenfolge* wird das *Single-Source-Shortest-Paths-Problem* für kantengewichtete, *azyklische Digraphen* in Zeit $O(|E| + |V|)$ gelöst.

Theorem

Theorem

Durch Relaxieren der Knoten in *topologischer Reihenfolge* wird das *Single-Source-Shortest-Paths-Problem* für kantengewichtete, *azyklische Digraphen* in Zeit $O(|E| + |V|)$ gelöst.

Beweis.

- Jede Kante $e = (v, w)$ wird genau einmal relaxiert. Direkt danach gilt $\text{distance}[w] \leq \text{distance}[v] + \text{weight}(e)$.
- Ungleichung gilt bis zur Terminierung
 - $\text{distance}[w]$ wird nie grösser.
 - $\text{distance}[v]$ wird nicht mehr verändert, da alle eingehenden Kanten aufgrund der topologischen Sortierung bereits relaxiert wurden.

→ Optimalitätskriterium ist bei Terminierung erfüllt. □

Verwandte Probleme: Längste Pfade

Definition (Längste Pfade in azyklischen Graphen)

Gegeben: Kantengewichteter, azyklischer Digraph, Startknoten s

Gefragt: Gibt es einen Pfad von s zu Knoten v ?

Falls ja, finde den Pfad mit maximalem Gewicht.

Verwandte Probleme: Längste Pfade

Definition (Längste Pfade in azyklischen Graphen)

Gegeben: Kantengewichteter, azyklischer Digraph, Startknoten s

Gefragt: Gibt es einen Pfad von s zu Knoten v ?

Falls ja, finde den Pfad mit maximalem Gewicht.

Multipliziere alle Kantengewichte mit -1 und verwende Kürzeste-Pfade-Algorithmus.

Verwandte Probleme: Kritischer Pfad

Gegeben:

- Menge von Aufgaben a , jede benötigt gegebene Zeit t_a
- Bedingungen $a \rightarrow a'$, dass a fertiggestellt sein muss, bevor a' begonnen werden kann (in lösbaren Problemen zyklfrei).

Verwandte Probleme: Kritischer Pfad

Gegeben:

- Menge von Aufgaben a , jede benötigt gegebene Zeit t_a
- Bedingungen $a \rightarrow a'$, dass a fertiggestellt sein muss, bevor a' begonnen werden kann (in lösbaren Problemen zyklfrei).

Frage:

- **Annahme:** Beliebig viele Aufgaben parallel ausführbar
- Wie lange benötigen Sie für die Erledigung aller Aufgaben?

Verwandte Probleme: Kritischer Pfad

Erstelle kantengewichteten Digraphen

- Knoten s, e + für jede Aufgabe a zwei Knoten a_s und a_e
- für alle a :
 - Kante (s, a_s) mit Gewicht 0
 - Kante (a_e, e) mit Gewicht 0
 - Kante (a_s, a_e) mit Gewicht t_a
- für jede Bedingung $a \rightarrow a'$ Kante (a_e, a'_s) mit Gewicht 0

Verwandte Probleme: Kritischer Pfad

Erstelle kantengewichteten Digraphen

- Knoten s, e + für jede Aufgabe a zwei Knoten a_s und a_e
- für alle a :
 - Kante (s, a_s) mit Gewicht 0
 - Kante (a_e, e) mit Gewicht 0
 - Kante (a_s, a_e) mit Gewicht t_a
- für jede Bedingung $a \rightarrow a'$ Kante (a_e, a'_s) mit Gewicht 0

Kritischer Pfad für Aufgabe a ist längster Pfad von s zu a_s .
Wähle Startzeit für a als Gewicht eines kritischen Pfades.

Verwandte Probleme: Kritischer Pfad

Erstelle kantengewichteten Digraphen

- Knoten s, e + für jede Aufgabe a zwei Knoten a_s und a_e
- für alle a :
 - Kante (s, a_s) mit Gewicht 0
 - Kante (a_e, e) mit Gewicht 0
 - Kante (a_s, a_e) mit Gewicht t_a
- für jede Bedingung $a \rightarrow a'$ Kante (a_e, a'_s) mit Gewicht 0

Kritischer Pfad für Aufgabe a ist längster Pfad von s zu a_s .

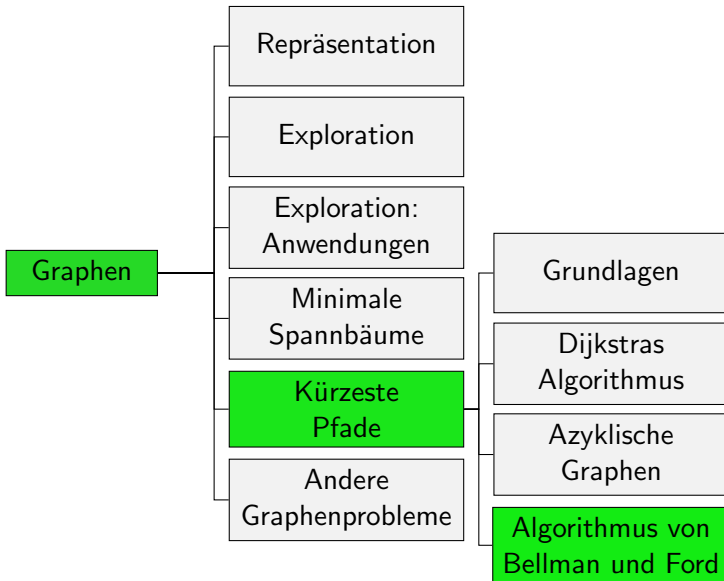
Wähle Startzeit für a als Gewicht eines kritischen Pfades.

→ Ergibt optimale Gesamtausführungszeit

(= Gewicht von längstem Pfad von s zu e)

Bellman-Ford-Algorithmus

Graphen: Übersicht



Problem

- Bei negativen Kantengewichten kann es **negative Zyklen** geben, d.h. Zyklen, bei denen die Summe der Kantengewichte negativ ist.
- Liegt ein Knoten eines solchen Zyklus auf einem Pfad von s nach v , können wir Pfade finden, deren Gewicht niedriger als jeder gegebene Wert ist.
→ kein korrekt gestelltes Problem
- Alternative Fragestellung: Finde kürzesten **einfachen Pfad**?
→ NP-schweres (= sehr schwieriges) Problem

Fragestellung

In vielen praktischen Anwendungen sind negative Zyklen ein Hinweis auf einen Modellierungsfehler.

Neue Fragestellung

Gegeben: Gewichteter Digraph, Startknoten s

Gefragt: Ist von s aus ein negativer Zyklus erreichbar?
Falls nein, berechne den Kürzeste-Pfade-Baum zu allen erreichbaren Knoten.

Bellman-Ford-Algorithmus: High-Level-Perspektive

In Graphen **ohne negative Zyklen** (aber mit negativen Gewichten):

Bellman-Ford-Algorithmus

- Initialisiere $distance[s] = 0$ für Startknoten s ,
 $distance[n] = \infty$ für alle anderen Knoten.
- Dann $|V|$ Durchläufe, in denen
jeweils alle Kanten relaxiert werden.

Bellman-Ford-Algorithmus: High-Level-Perspektive

In Graphen **ohne negative Zyklen** (aber mit negativen Gewichten):

Bellman-Ford-Algorithmus

- Initialisiere $distance[s] = 0$ für Startknoten s ,
 $distance[n] = \infty$ für alle anderen Knoten.
- Dann $|V|$ Durchläufe, in denen jeweils alle Kanten relaxiert werden.

Proposition

Das Verfahren löst das Single-Source-Shortest-Paths-Problem für Graphen ohne negative Zyklen in Zeit $O(|E||V|)$ und mit zusätzlichem Speicher $O(|V|)$.

Beweisidee: Nach i Durchgängen ist jeder Pfad zu v mindestens so kurz wie jeder Pfad zu v mit höchstens i Kanten.

Effizientere Variante

- Ändert sich $distance[v]$ in Durchgang i nicht, ändert auch keine Relaxierung einer von v ausgehenden Kante in Durchgang $i + 1$ etwas.
- Idee: Merke dir Knoten mit veränderter $distance$ in **Queue**.
- In der Praxis deutlich schneller, auch wenn sich das Worst-Case-Verhalten nicht verbessert.

Was ist mit negativen Zyklen?

- Ist von s aus **kein** negativer Zyklus erreichbar, wird im $|V|$ -ten Durchgang keine Knotendistanz mehr geupdated.
- Gibt es einen negativen Zyklus, führt dies zu einem Zyklus mit den in `edge_to` gespeicherten Kanten.
- In der Praxis testen wir das nach jedem Durchlauf.

Bellman-Ford-Algorithmus

```
1 class BellmanFordSSSP:
2     def __init__(self, graph, start_node):
3         self.edge_to = [None] * graph.no_nodes()
4         self.distance = [float('inf')] * graph.no_nodes()
5         self.in_queue = [False] * graph.no_nodes()
6         self.queue = deque()
7         self.calls_to_relax = 0
8         self.cycle = None
9
10        self.distance[start_node] = 0
11        self.queue.append(start_node)
12        self.in_queue[start_node] = True
13        while (not self.has_negative_cycle() and
14               self.queue): # queue not empty
15            node = self.queue.popleft()
16            self.in_queue[node] = False
17            self.relax(graph, node)
18
```

Bellman-Ford-Algorithmus (Fortsetzung)

```
19     def relax(self, graph, v):
20         for edge in graph.adjacent_edges(v):
21             w = edge.to_node()
22             if self.distance[v] + edge.weight() < self.distance[w]:
23                 self.edge_to[w] = edge
24                 self.distance[w] = self.distance[v] + edge.weight()
25                 if not self.in_queue[w]:
26                     self.queue.append(w)
27                     self.in_queue[w] = True
28     self.calls_to_relax += 1
29     if self.calls_to_relax % graph.no_nodes() == 0:
30         self.find_negative_cycle()
31
```

Bellman-Ford-Algorithmus (Fortsetzung)

```
32     def has_negative_cycle(self):
33         return self.cycle is not None
34
35     def find_negative_cycle(self):
36         no_nodes = len(self.distance)
37         graph = EdgeWeightedDigraph(no_nodes)
38         for edge in self.edge_to:
39             if edge is not None:
40                 graph.add_edge(edge)
41
42         cycle_finder = WeightedDirectedCycle(graph)
43         self.cycle = cycle_finder.get_cycle()
```

WeightedDirectedCycle detektiert gerichtete Zykel in gewichteten Graphen.

→ Folge von Tiefensuchen wie in DirectedCycle (C2)

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- **Nicht-negative Gewichte**
 - Sehr häufiges Problem
 - **Dijkstras Algorithmus** mit Laufzeit $O(|E| \log |V|)$
- **Azyklische Graphen**
 - Kommt in manchen Anwendungen vor und sollte ausgenutzt werden.
 - Mit **topologischer Sortierung** in linearer Zeit $O(|E| + |V|)$
- **Negative Gewichte** oder **negative Zykel**
 - Gibt es keinen negativen Zyklus findet der **Bellman-Ford-Algorithmus kürzeste Pfade**.
 - Sonst findet er einen **negativen Zyklus**.