

Algorithmen und Datenstrukturen

C6. Kürzeste Pfade: Algorithmen

Gabriele Röger

Universität Basel

25. Mai 2023

C6.1 Dijkstras Algorithmus

C6.2 Azyklische Graphen

C6.3 Bellman-Ford-Algorithmus

C6.4 Zusammenfassung

Informatiker des Tages: Edsger Dijkstra



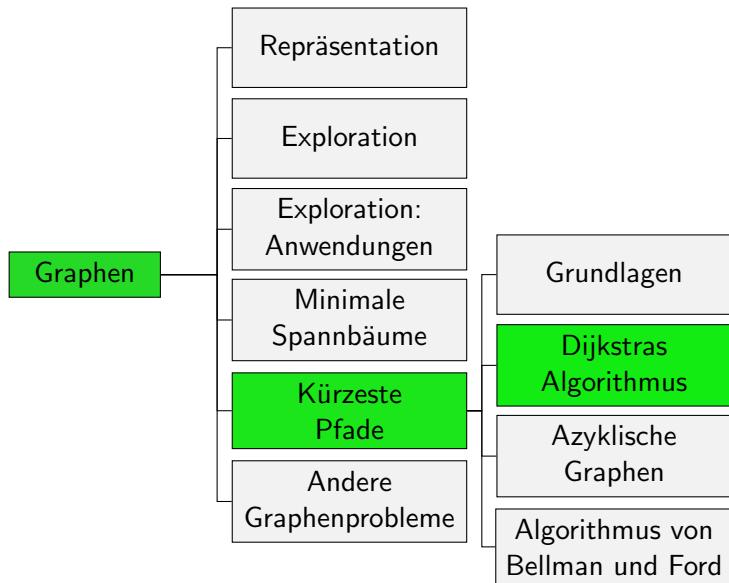
Edsger Dijkstra

- ▶ Niederländischer Mathematiker, 1930–2002
- ▶ Verfechter und Mitentwickler der **strukturierten Programmierung**
 - ▶ beteiligt am Entwurf von Algol 60
 - ▶ 1968: Aufsatz „**Go To Statement Considered Harmful**“
- ▶ 1959: **Kürzester-Pfade**-Algorithmus
- ▶ Gewinner **Turing Award** (1972)

„Do only what only you can do.“

C6.1 Dijkstras Algorithmus

Graphen: Übersicht



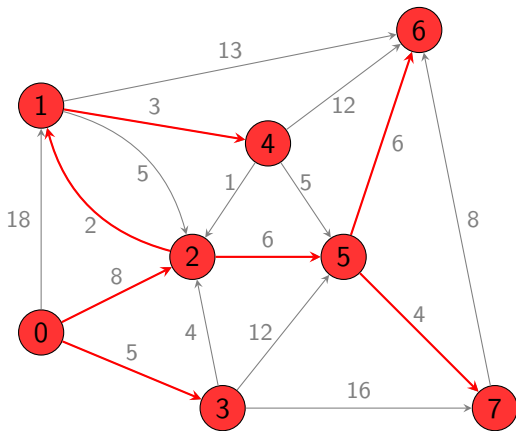
Dijkstras Algorithmus: High-Level-Perspektive

Algorithmus von Dijkstra (für nicht-negative Kantengewichte)

Baue Kürzeste-Pfade-Baum ausgehend von Startknoten s auf:

- ▶ Betrachte Knoten (die noch nicht im Baum sind) in aufsteigender Reihenfolge ihres Abstandes von s .
- ▶ Nimm Knoten in Baum auf und relaxiere ausgehende Kanten.

Dijkstras Algorithmus: Illustration



distance

0	0
1	10
2	8
3	5
4	13
5	14
6	20
7	18

Datenstrukturen

- ▶ **edge_to**: knotenindiziertes Array, das an Stelle v die letzte Kante des kürzesten bekannten Pfades enthält.
- ▶ **distance**: knotenindiziertes Array, das an Stelle v die Kosten des kürzesten bekannten Pfades vom Startknoten zu v enthält.
- ▶ **pq**: indizierte Priority-Queue von Knoten
 - ▶ Knoten noch nicht im Baum
 - ▶ Bereits ein Pfad zu dem Knoten bekannt
 - ▶ Sortiert nach Kosten des kürzesten bekannten Pfades zu dem Knoten.

Dijkstras Algorithmus

```
1 class DijkstraSSSP:
2     def __init__(self, graph, start_node):
3         self.edge_to = [None] * graph.no_nodes()
4         self.distance = [float('inf')] * graph.no_nodes()
5         pq = IndexMinPQ()
6         self.distance[start_node] = 0
7         pq.insert(start_node, 0)
8         while not pq.empty():
9             self.relax(graph, pq.del_min(), pq)
10
11     def relax(self, graph, v, pq):
12         for edge in graph.adjacent_edges(v):
13             w = edge.to_node()
14             if self.distance[v] + edge.weight() < self.distance[w]:
15                 self.edge_to[w] = edge
16                 self.distance[w] = self.distance[v] + edge.weight()
17                 if pq.contains(w):
18                     pq.change(w, self.distance[w])
19                 else:
20                     pq.insert(w, self.distance[w])
```

Korrektheit

Theorem

Dijkstras Algorithmus löst das *Single-Source-Shortest-Paths-Problem* in Digraphen mit *nicht-negativen Gewichten*.

Beweis.

- ▶ Ist v von Startknoten erreichbar, wird jede ausgehende Kante $e = (v, w)$ genau einmal relaxiert (wenn v relaxiert wird).
- ▶ Dann gilt $distance[w] \leq distance[v] + weight(e)$.
- ▶ Ungleichung bleibt erfüllt:
 - ▶ $distance[v]$ wird nicht mehr verändert, da Wert minimal war und es keine negativen Kantengewichte gibt.
 - ▶ $distance[w]$ wird höchstens kleiner.
- ▶ Sind alle erreichbaren Kanten relaxiert, ist Optimalitätsbedingung erfüllt.



Vergleich zu Eager Prim-Algorithmus

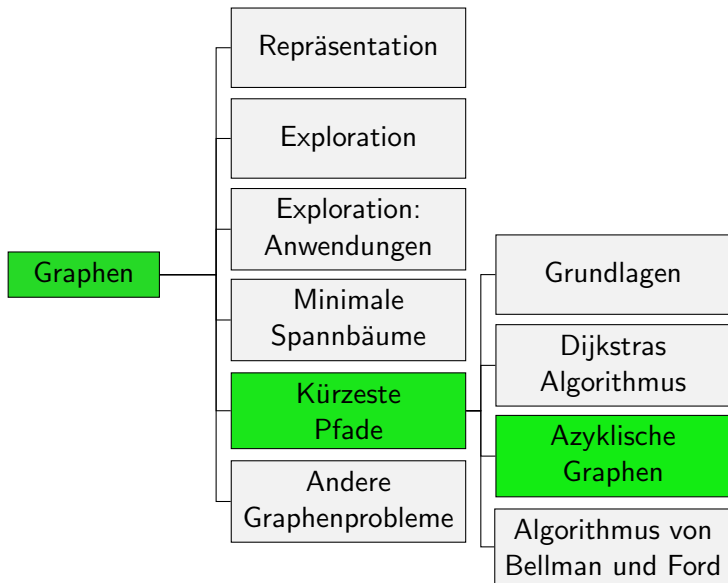
Dijkstras Algorithmus sehr ähnlich zu Eager Prim-Algorithmus für minimale Spannbäume

- ▶ Beide bauen sukzessive einen Baum auf
- ▶ nächster Knoten Prim: minimale Distanz zu **bisherigem Baum**.
- ▶ nächster Knoten Dijkstra: minimale Distanz vom **Startknoten**.
- ▶ `included_nodes` von Prim bei Dijkstra nicht notwendig, da bei bereits erledigten Knoten die `if`-Bedingung in Zeile 19 immer falsch ist.

Laufzeit $O(|E| \log |V|)$ und Platzbedarf $O(|V|)$ direkt übertragbar.

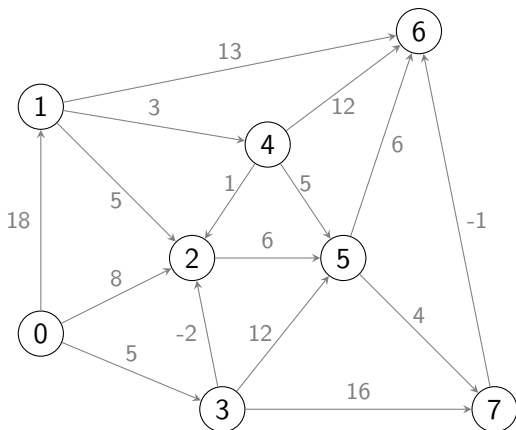
C6.2 Azyklische Graphen

Graphen: Übersicht



Zykelfreiheit ausnutzen

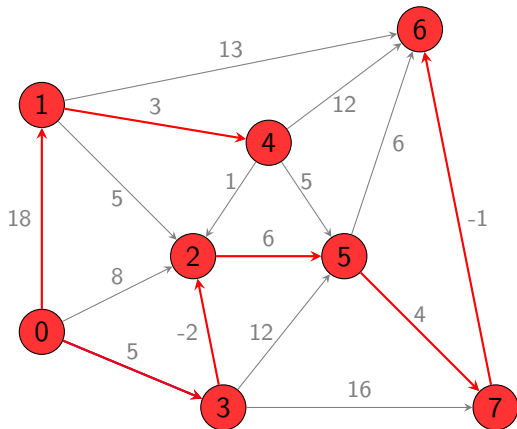
Gegeben: Azyklischer, gewichteter Digraph



Können wir die Zykelfreiheit beim Finden kürzester Pfade nutzen?

Beispiel

Idee: Relaxiere Knoten in **topologischer Reihenfolge der Startknoten**
z.B. 0, 1, 3, 4, 2, 5, 7, 6



distance

0	0
1	18
2	3
3	5
4	21
5	9
6	12
7	13

Theorem

Theorem

Durch Relaxieren der Knoten in *topologischer Reihenfolge* wird das *Single-Source-Shortest-Paths-Problem* für kantengewichtete, *azyklische Digraphen* in Zeit $O(|E| + |V|)$ gelöst.

Beweis.

- ▶ Jede Kante $e = (v, w)$ wird genau einmal relaxiert. Direkt danach gilt $\text{distance}[w] \leq \text{distance}[v] + \text{weight}(e)$.
- ▶ Ungleichung gilt bis zur Terminierung
 - ▶ $\text{distance}[w]$ wird nie grösser.
 - ▶ $\text{distance}[v]$ wird nicht mehr verändert, da alle eingehenden Kanten aufgrund der topologischen Sortierung bereits relaxiert wurden.

→ Optimalitätskriterium ist bei Terminierung erfüllt. □

Verwandte Probleme: Längste Pfade

Definition (Längste Pfade in azyklischen Graphen)

Gegeben: Kantengewichteter, azyklischer Digraph, Startknoten s

Gefragt: Gibt es einen Pfad von s zu Knoten v ?

Falls ja, finde den Pfad mit maximalem Gewicht.

Multipliziere alle Kantengewichte mit -1 und verwende Kürzeste-Pfade-Algorithmus.

Verwandte Probleme: Kritischer Pfad

Gegeben:

- ▶ Menge von Aufgaben a , jede benötigt gegebene Zeit t_a
- ▶ Bedingungen $a \rightarrow a'$, dass a fertiggestellt sein muss, bevor a' begonnen werden kann (in lösbaren Problemen zykliefrei).

Frage:

- ▶ **Annahme:** Beliebig viele Aufgaben parallel ausführbar
- ▶ Wie lange benötigen Sie für die Erledigung aller Aufgaben?

Verwandte Probleme: Kritischer Pfad

Erstelle kantengewichteten Digraphen

- ▶ Knoten s, e + für jede Aufgabe a zwei Knoten a_s und a_e
- ▶ für alle a :
 - ▶ Kante (s, a_s) mit Gewicht 0
 - ▶ Kante (a_e, e) mit Gewicht 0
 - ▶ Kante (a_s, a_e) mit Gewicht t_a
- ▶ für jede Bedingung $a \rightarrow a'$ Kante (a_e, a'_s) mit Gewicht 0

Kritischer Pfad für Aufgabe a ist längster Pfad von s zu a_s .

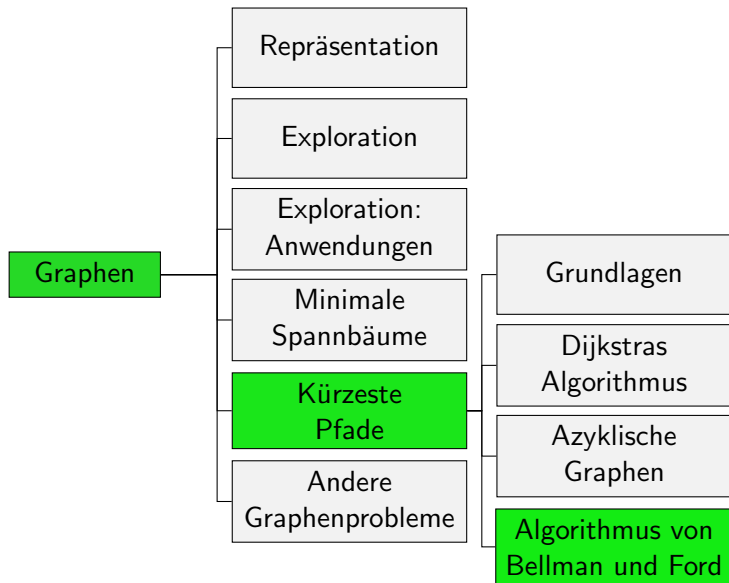
Wähle Startzeit für a als Gewicht eines kritischen Pfades.

→ Ergibt optimale Gesamtausführungszeit

(= Gewicht von längstem Pfad von s zu e)

C6.3 Bellman-Ford-Algorithmus

Graphen: Übersicht



Problem

- ▶ Bei negativen Kantengewichten kann es **negative Zyklen** geben, d.h. Zyklen, bei denen die Summe der Kantengewichte negativ ist.
- ▶ Liegt ein Knoten eines solchen Zyklus auf einem Pfad von s nach v , können wir Pfade finden, deren Gewicht niedriger als jeder gegebene Wert ist.
→ kein korrekt gestelltes Problem
- ▶ Alternative Fragestellung: Finde kürzesten **einfachen Pfad**?
→ NP-schweres (= sehr schwieriges) Problem

Fragestellung

In vielen praktischen Anwendungen sind negative Zyklen ein Hinweis auf einen Modellierungsfehler.

Neue Fragestellung

Gegeben: Gewichteter Digraph, Startknoten s

Gefragt: Ist von s aus ein negativer Zyklus erreichbar?
Falls nein, berechne den Kürzeste-Pfade-Baum zu allen erreichbaren Knoten.

Bellman-Ford-Algorithmus: High-Level-Perspektive

In Graphen **ohne negative Zyklen** (aber mit negativen Gewichten):

Bellman-Ford-Algorithmus

- ▶ Initialisiere $distance[s] = 0$ für Startknoten s ,
 $distance[n] = \infty$ für alle anderen Knoten.
- ▶ Dann $|V|$ Durchläufe, in denen
jeweils alle Kanten relaxiert werden.

Proposition

Das Verfahren löst das Single-Source-Shortest-Paths-Problem für Graphen ohne negative Zyklen in Zeit $O(|E||V|)$ und mit zusätzlichem Speicher $O(|V|)$.

Beweisidee: Nach i Durchgängen ist jeder Pfad zu v mindestens so kurz wie jeder Pfad zu v mit höchstens i Kanten.

Effizientere Variante

- ▶ Ändert sich $distance[v]$ in Durchgang i nicht, ändert auch keine Relaxierung einer von v ausgehenden Kante in Durchgang $i + 1$ etwas.
- ▶ **Idee:** Merke dir Knoten mit veränderter $distance$ in **Queue**.
- ▶ In der Praxis deutlich schneller, auch wenn sich das Worst-Case-Verhalten nicht verbessert.

Was ist mit negativen Zyklen?

- ▶ Ist von s aus **kein** negativer Zyklus erreichbar, wird im $|V|$ -ten Durchgang keine Knotendistanz mehr geupdated.
- ▶ Gibt es einen negativen Zyklus, führt dies zu einem Zyklus mit den in `edge_to` gespeicherten Kanten.
- ▶ In der Praxis testen wir das nach jedem Durchlauf.

Bellman-Ford-Algorithmus

```
1 class BellmanFordSSSP:
2     def __init__(self, graph, start_node):
3         self.edge_to = [None] * graph.no_nodes()
4         self.distance = [float('inf')] * graph.no_nodes()
5         self.in_queue = [False] * graph.no_nodes()
6         self.queue = deque()
7         self.calls_to_relax = 0
8         self.cycle = None
9
10        self.distance[start_node] = 0
11        self.queue.append(start_node)
12        self.in_queue[start_node] = True
13        while (not self.has_negative_cycle() and
14                self.queue): # queue not empty
15            node = self.queue.popleft()
16            self.in_queue[node] = False
17            self.relax(graph, node)
18
```

Bellman-Ford-Algorithmus (Fortsetzung)

```
19     def relax(self, graph, v):
20         for edge in graph.adjacent_edges(v):
21             w = edge.to_node()
22             if self.distance[v] + edge.weight() < self.distance[w]:
23                 self.edge_to[w] = edge
24                 self.distance[w] = self.distance[v] + edge.weight()
25                 if not self.in_queue[w]:
26                     self.queue.append(w)
27                     self.in_queue[w] = True
28     self.calls_to_relax += 1
29     if self.calls_to_relax % graph.no_nodes() == 0:
30         self.find_negative_cycle()
31
```

Bellman-Ford-Algorithmus (Fortsetzung)

```
32     def has_negative_cycle(self):
33         return self.cycle is not None
34
35     def find_negative_cycle(self):
36         no_nodes = len(self.distance)
37         graph = EdgeWeightedDigraph(no_nodes)
38         for edge in self.edge_to:
39             if edge is not None:
40                 graph.add_edge(edge)
41
42         cycle_finder = WeightedDirectedCycle(graph)
43         self.cycle = cycle_finder.get_cycle()
```

WeightedDirectedCycle detektiert gerichtete Zykel in gewichteten Graphen.

→ Folge von Tiefensuchen wie in DirectedCycle (C2)

C6.4 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ **Nicht-negative Gewichte**
 - ▶ Sehr häufiges Problem
 - ▶ **Dijkstras Algorithmus** mit Laufzeit $O(|E| \log |V|)$
- ▶ **Azyklische Graphen**
 - ▶ Kommt in manchen Anwendungen vor und sollte ausgenutzt werden.
 - ▶ Mit **topologischer Sortierung** in linearer Zeit $O(|E| + |V|)$
- ▶ **Negative Gewichte** oder **negative Zykel**
 - ▶ Gibt es keinen negativen Zyklus findet der **Bellman-Ford-Algorithmus** kürzeste Pfade.
 - ▶ Sonst findet er einen **negativen Zyklus**.