

Algorithmen und Datenstrukturen

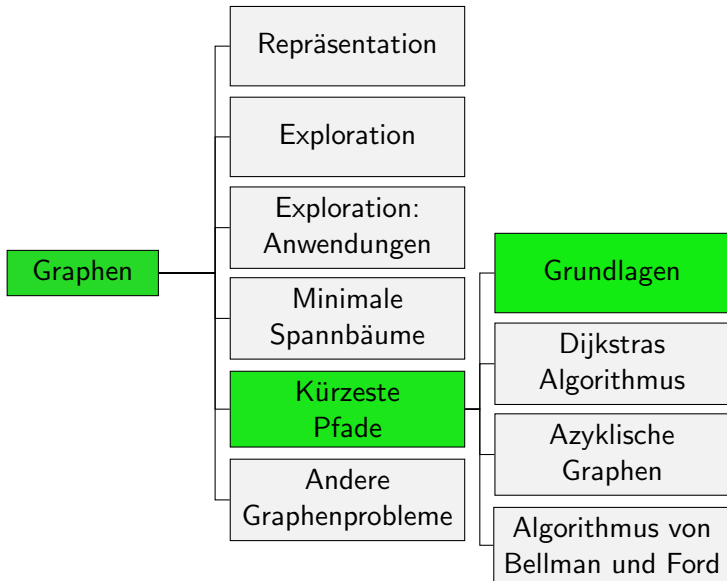
C5. Kürzeste Pfade: Grundlagen

Gabriele Röger

Universität Basel

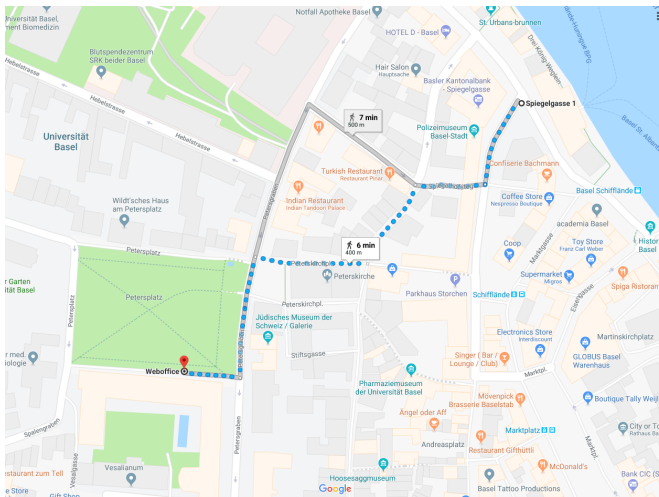
24. Mai 2023

Graphen: Übersicht



Einführung

Google Maps



Inhaltsabhängige Bildverzerrung (Seam Carving)



Anwendungen

- Routenplanung
- Pfadplanung in Computerspielen
- Roboternavigation
- Seam Carving
- Handlungsplanung
- Typesetting in TeX
- Routingprotokolle in Netzwerken (OSPF, BGP, RIP)
- Routing von Telekommunikationsnachrichten
- Verkehrsplanung
- Ausnutzen von Arbitrage-Möglichkeiten in Wechselkursen

Quelle (teilweise): Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications,
R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, Prentice Hall, 1993

Varianten

Was interessiert uns?

- **Single source:** von einem Knoten s zu allen anderen Knoten
- **Single sink:** von allen Knoten zu einem Knoten t
- **Source-sink:** von Knoten s zu Knoten t
- **All pairs:** von jedem Knoten zu jedem anderen

Varianten

Was interessiert uns?

- **Single source:** von einem Knoten s zu allen anderen Knoten
- **Single sink:** von allen Knoten zu einem Knoten t
- **Source-sink:** von Knoten s zu Knoten t
- **All pairs:** von jedem Knoten zu jedem anderen

Grapheneigenschaften

- Beliebige / nicht-negative / euklidische Gewichte
- Beliebige / nicht-negative / keine Zyklen

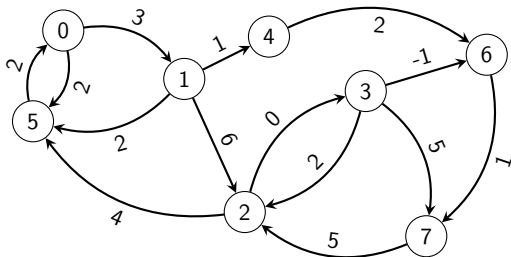
Grundlagen

Gewichtete gerichtete Graphen

Die (high-level) Definition gewichteter Graphen bleibt gleich, wir betrachten jetzt aber gerichtete Graphen.

Gewichteter Graph

Bei einem (kanten-)gewichteten Graphen hat jede Kante $e \in E$ ein Gewicht (oder Kosten) $weight(e)$ aus den reellen Zahlen.



Erinnerung: Ein gerichteter Graph heisst auch **Digraph**.

API für gewichtete, gerichtete Kante

```
1 class DirectedEdge:
2     # Kante von n1 zu n2 mit Gewicht w
3     def __init__(n1: int, n2: int, w: float) -> None
4
5     # Gewicht der Kante
6     def weight() -> float
7
8     # Knoten, von dem Kante ausgeht
9     def from_node() -> int
10
11    # Knoten, zu dem die Kante führt
12    def to_node() -> int
```

API für gewichtete Digraphen

```
1  class EdgeWeightedDigraph:
2      # Graph mit no_nodes Knoten und keinen Kanten
3      def __init__(no_nodes: int) -> None
4
5      # Füge gewichtete Kante hinzu
6      def add_edge(e: DirectedEdge) -> None
7
8      # Anzahl der Knoten
9      def no_nodes() -> int
10
11     # Anzahl der Kanten
12     def no_edges() -> int
13
14     # Alle Kanten, die von n ausgehen
15     def adjacent_edges(n: int) -> Generator[DirectedEdge]
16
17     # Alle Kanten
18     def all_edges() -> Generator[DirectedEdge]
```

Kürzeste-Pfade-Problem

Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Startknoten, SSSP

- Gegeben: Graph und Startknoten s
- Anfrage für Knoten v
 - Gibt es Pfad von s nach v ?
 - Wenn ja, was ist der kürzeste Pfad?

Engl. [single-source shortest paths problem](#)

Kürzeste-Pfade-Problem

Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Startknoten, SSSP

- Gegeben: Graph und Startknoten s
- Anfrage für Knoten v
 - Gibt es Pfad von s nach v ?
 - Wenn ja, was ist der kürzeste Pfad?
- In **kantengewichteten Graphen**:
Kürzester Pfad ist der mit dem **geringstem Gewicht**
(= minimale Summe der Kantenkosten)

Engl. **single-source shortest paths problem**

API für Kürzeste-Pfade-Implementierungen

Die Algorithmen für kürzeste Pfade sollen folgendes Interface implementieren:

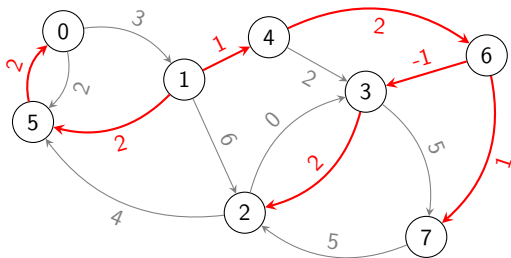
```
1 class ShortestPaths:
2     # Konstruktor mit Startknoten s
3     def __init__(graph: EdgeWeightedDigraph, s: int) -> None
4
5     # Abstand von s zu v; infinity, falls kein Pfad existiert
6     def dist_to(v: int) -> float
7
8     # Gibt es Pfad von s zu v?
9     def has_path_to(v: int) -> bool
10
11    # Pfad von s zu v; None, falls keiner vorhanden
12    def path_to(v: int) -> Generator[DirectedEdge]
```

Kürzeste-Pfade-Baum

Kürzeste-Pfade-Baum

Für einen kantengewichteten Digraphen G und Knoten s ist ein **Kürzeste-Pfade-Baum** ein Teilgraph, der

- einen gerichteten Baum mit Wurzel s bildet,
- alle von s aus erreichbaren Knoten enthält, und
- bei dem jeder Baumpfad ein kürzester Pfad in G ist.

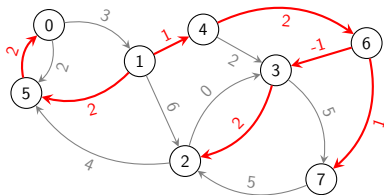


Kürzeste-Pfade-Baum: Repräsentation

Repräsentation: knotenindizierte Arrays

- **parent** mit Elternknotenreferenz
None für nicht erreichbare und Startknoten
- **distance** mit Abstand vom Startknoten
 ∞ für nicht erreichbare Knoten

	0	1	2	3	4	5	6	7
parent	5	None	3	6	1	1	4	6
distance	4	0	4	2	1	2	3	4



Was ist mit parallelen Kanten?

Extraktion der kürzesten Pfade

```
1  def path_to(self, node):
2      if self.distance[node] == float('inf'):
3          yield None
4      elif self.parent[node] is None:
5          yield node
6      else:
7          # output path from start to parent node
8          self.path_to(self.parent[node])
9          # finish with node
10         yield node
```

Diese Implementierung generiert eine Sequenz von Knoten. Was müssten wir ändern, um eine entsprechende Sequenz von Kanten zu generieren?

Kantenrelaxierung

Kantenrelaxierung für Kante (u, v)

- $\text{distance}[u]$: Länge des kürzesten **bekanntem** Pfades zu u
- $\text{distance}[v]$: Länge des kürzesten **bekanntem** Pfades zu v
- $\text{parent}[v]$: Vorgänger in letzter Kante des kürzesten **bekanntem** Weges zu v
- Ermöglicht Kante (u, v) einen **kürzeren Weg zu v (durch u)?**
- Dann update $\text{distance}[v]$ und $\text{parent}[v]$.

Illustration: Tafel

Kantenrelaxierung

```
1  def relax(self, edge):
2      u = edge.from_node()
3      v = edge.to_node()
4      if self.distance[v] > self.distance[u] + edge.weight():
5          self.parent[v] = u
6          self.distance[v] = self.distance[u] + edge.weight()
```

Optimalitätskriterium und Generisches Verfahren

Optimalitätskriterium

Theorem

Sei G ein gewichteter Digraph ohne negative Zyklen.

Array $distance[]$ enthält die Kosten der kürzesten Pfade von s genau dann, wenn

- 1 $distance[s] = 0$
- 2 $distance[w] \leq distance[v] + weight(e)$
für alle Kanten $e = (v, w)$, und
- 3 *für alle Knoten v ist $distance[v]$ die Länge irgendeines Pfades von s zu v bzw. ∞ , falls kein solcher Pfad existiert.*

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis

„ \Rightarrow “

Da der Graph keine Zyklen mit negativen Gesamtkosten enthält, kann kein Pfad von s zu s negative Kosten haben. Die Kosten des leeren Pfades sind damit optimal und $\text{distance}[s]$ ist 0.

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis

„ \Rightarrow “

Da der Graph keine Zyklen mit negativen Gesamtkosten enthält, kann kein Pfad von s zu s negative Kosten haben. Die Kosten des leeren Pfades sind damit optimal und $\text{distance}[s]$ ist 0.

Betrachte beliebige Kante e von u nach v .

Der kürzeste Pfad von s nach u hat Kosten $\text{distance}[u]$.

Erweitern wir diesen Pfad um Kante e , erhalten wir einen Pfad von s zu v mit Kosten $\text{distance}[u] + \text{weight}(e)$. Die Kosten eines kürzesten Pfades von s zu v können also nicht grösser sein und es gilt $\text{distance}[v] \leq \text{distance}[u] + \text{weight}(e)$

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis (Fortsetzung).

„ \Leftarrow “

Für unerreichbare Knoten ist der Wert per Definition unendlich.

Betrachte beliebigen Knoten v und kürzesten Pfad

$p = (v_0, \dots, v_n)$ von s zu v , d.h. $v_0 = s$, $v_n = v$.

Sei e_i jeweils eine günstigste Kante von v_{i-1} zu v_i .

Da alle Ungleichungen erfüllt sind, gilt

$$\begin{aligned} \text{distance}[v_n] &\leq \text{distance}[v_{n-1}] + \text{weight}(e_n) \\ &\leq \text{distance}[v_{n-2}] + \text{weight}(e_{n-1}) + \text{weight}(e_n) \\ &\leq \dots \leq \text{weight}(e_1) + \dots + \text{weight}(e_n) \\ &= \text{Kosten des optimalen Pfads} \end{aligned}$$

Wegen Punkt 3 ist $\text{distance}[v_n]$ auch nicht echt kleiner als die optimalen Pfadkosten. □

Generischer Algorithmus

Generischer Algorithmus für Startknoten s

- Initialisiere $\text{distance}[s] = 0$ und $\text{distance}[v] = \infty$ für alle anderen Knoten
- Solange das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist:
Relaxiere eine beliebige Kante

Korrekt:

- Endliches $\text{distance}[v]$ entspricht immer den Kosten eines Pfades von s zu v .
- Jede erfolgreiche Relaxierung reduziert $\text{distance}[v]$ für ein v .
- Für jeden Knoten kann Distanz nur endlich oft reduziert werden.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- **single-source shortest paths**: Berechne in einem kantengewichteten Digraphen kürzeste Pfade von einem gegebenen Knoten zu allen erreichbaren Knoten.
- **Kantenrelaxierung**: Ist für Kante (u,v) die beste bekannte Distanz zu v grösser als die zu u plus das Kantengewicht, dann update die Distanz zu v (mit Vorgänger u).
- **Generischer Algorithmus**
 - Basiert auf Kantenrelaxierung und Optimalitätskriterium
 - Ist in jeder Instanziierung für alle gewichteten Digraphen **ohne negative Zyklen** korrekt.
 - Konkrete Instanziierungen: nächstes Kapitel