

Algorithmen und Datenstrukturen

C2. Graphenexploration: Anwendungen

Gabriele Röger

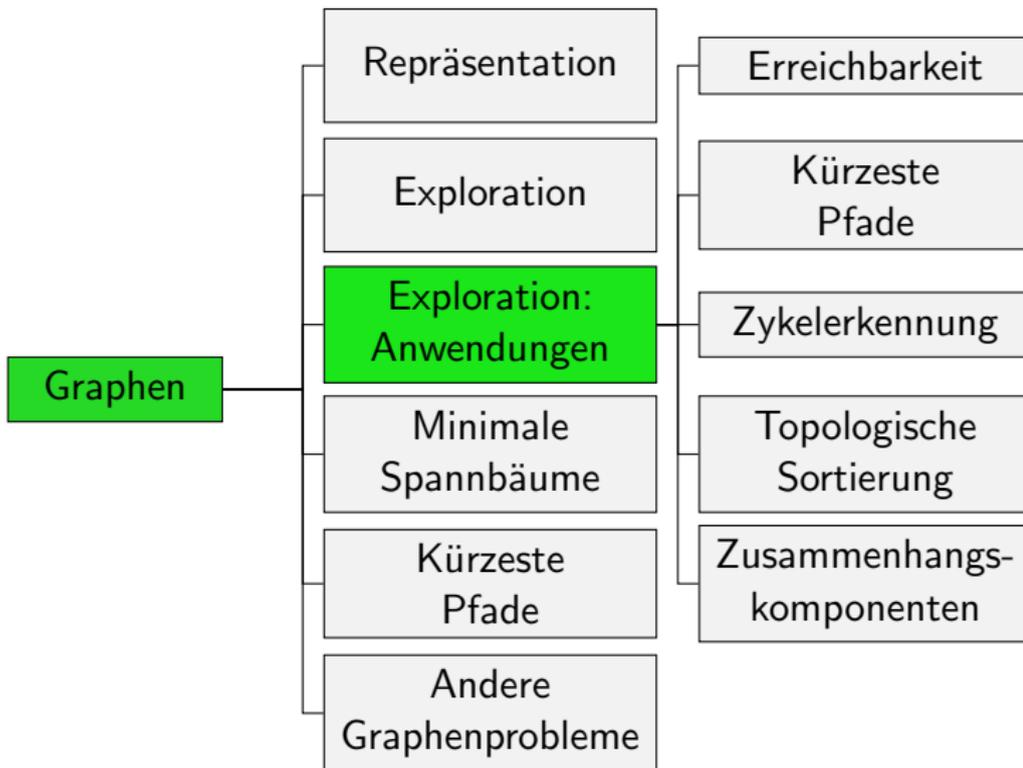
Universität Basel

4. Mai 2023

Erinnerung: Graphenexploration

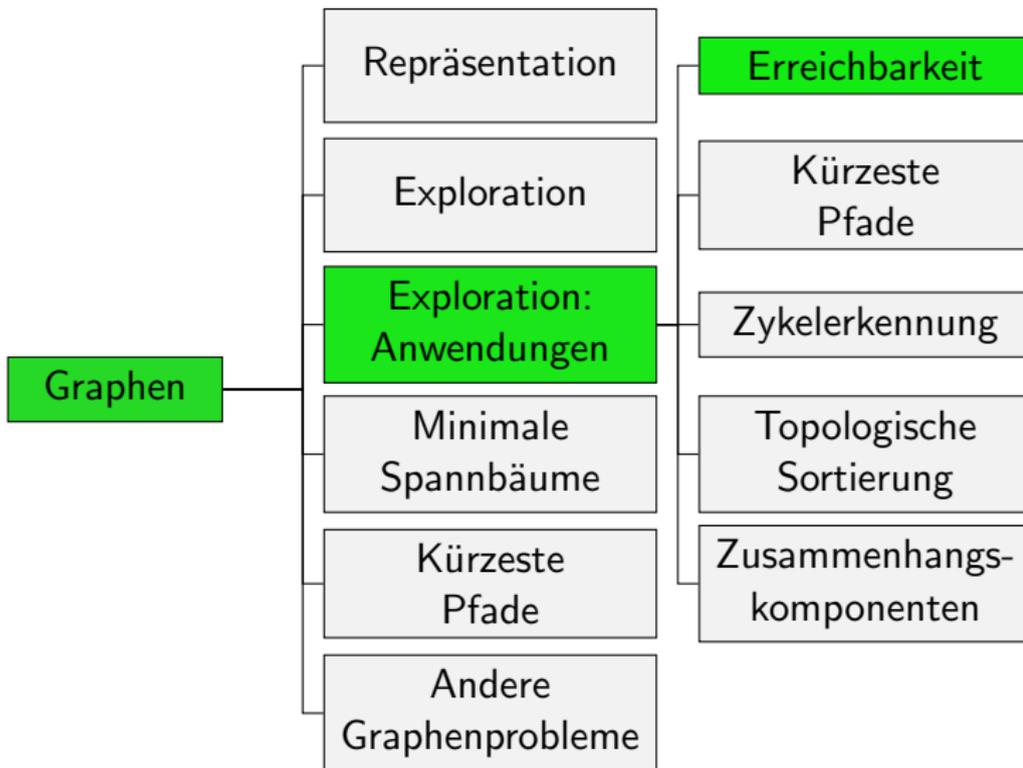
- **Aufgabe:** Gegeben einen Knoten v , besuche alle Knoten, die von v aus erreichbar sind.
- Wird oft als Teil anderer Graphenalgorithmien benötigt.
- **Tiefensuche:** erst einmal möglichst tief in den Graphen (weit weg von v)
- **Breitensuche:** erst alle Nachbarn, dann Nachbarn der Nachbarn, ...

Graphen: Übersicht



Erreichbarkeit

Graphen: Übersicht

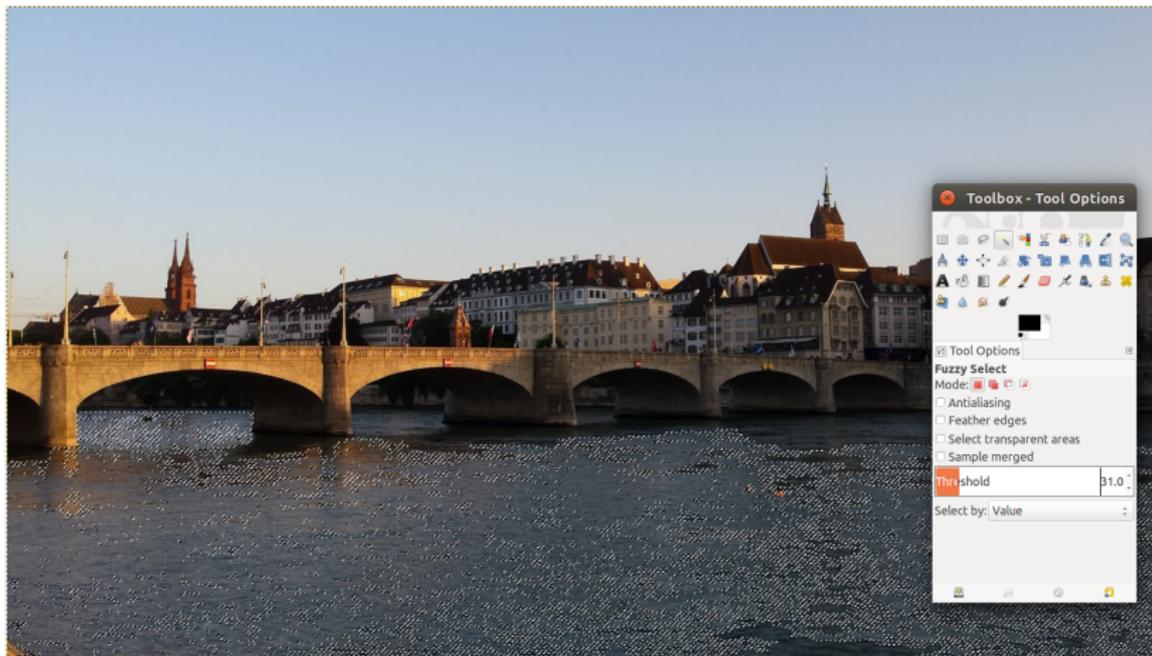


Mark-and-Sweep-Speicherbereinigung

Ziel: Gib Speicherplatz frei, der von nicht mehr zugreifbaren Objekten belegt wird.

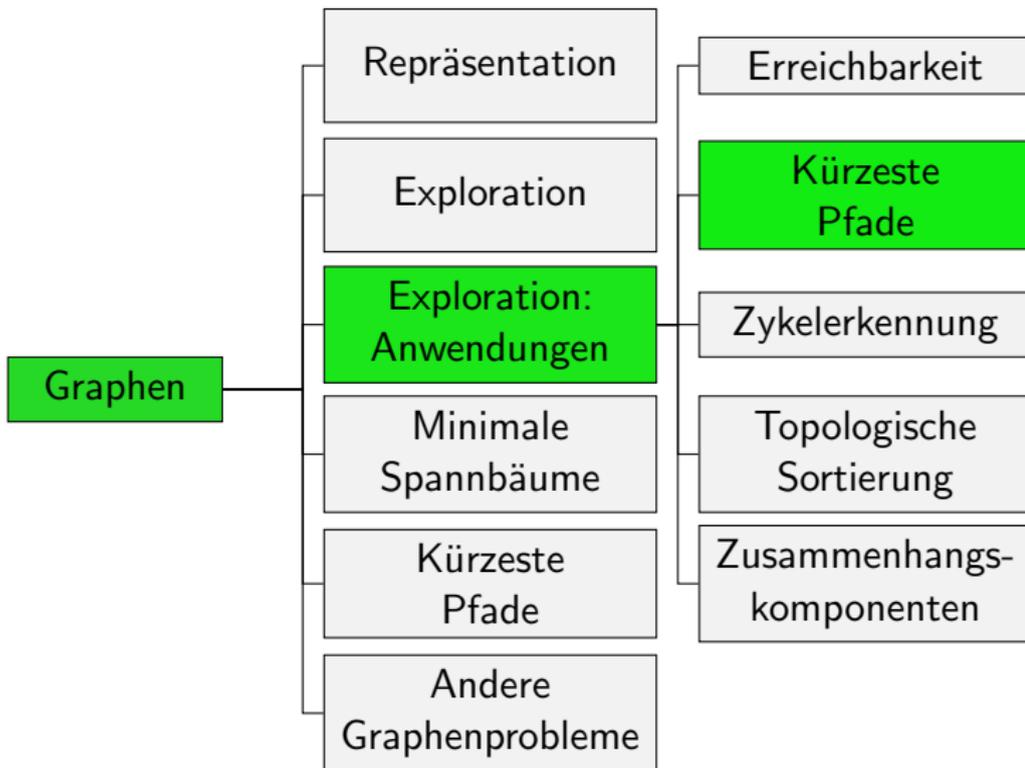
- Gerichteter Graph: **Objekte** als Knoten, **Referenzen auf Objekte** als Kanten
- Ein Bit pro Objekt für Markierung in Speicherbereinigung
- **Mark:** Markiere in regelmässigen Abständen alle erreichbaren Objekte.
- **Sweep:** Gib alle nicht markierten Objekte frei.

Zauberstab in Bildbearbeitung



Kürzeste Pfade

Graphen: Übersicht



Kürzeste Pfade: Idee

- Breitensuche besucht die Knoten mit aufsteigendem (minimalen) Abstand vom Startknoten.
- Erster Besuch eines Knoten passiert auf kürzestem Pfad.
- **Idee:** Verwende Pfad aus induzierten Suchbaum

Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `graph_exploration_applications.ipynb`

Kürzeste-Pfade-Problem

Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Startknoten

- Gegeben: Graph und Startknoten s
- Anfrage für Knoten v
 - Gibt es Pfad von s nach v ?
 - Wenn ja, was ist der kürzeste Pfad?
- Engl. [single-source shortest paths](#), SSSP

Kürzeste Pfade: Algorithmus

```
1 class SingleSourceShortestPaths:
2     def __init__(self, graph, start_node):
3         self.predecessor = [None] * graph.no_nodes()
4         self.predecessor[start_node] = start_node
5
6         # precompute predecessors with breadth-first search with
7         # self.predecessors used for detecting visited nodes
8         queue = deque()
9         queue.append(start_node)
10        while queue:
11            v = queue.popleft()
12            for s in graph.successors(v):
13                if self.predecessor[s] is None:
14                    self.predecessor[s] = v
15                    queue.append(s)
16        ...
```

Im Prinzip wie gehabt
(nur als Klasse)

Kürzeste Pfade: Algorithmus (Fortsetzung)

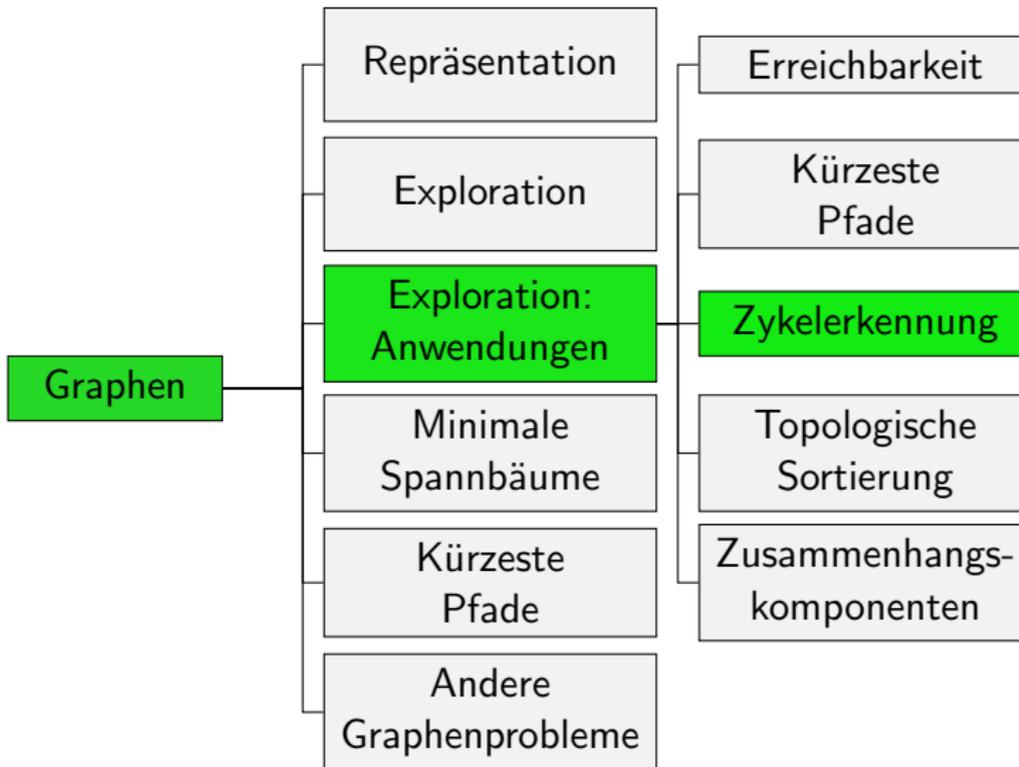
```
19     def has_path_to(self, node):
20         return self.predecessor[node] is not None
21
22     def get_path_to(self, node):
23         if not self.has_path_to(node):
24             return None
25         if self.predecessor[node] == node: # start node
26             return [node]
27         pre = self.predecessor[node]
28         path = self.get_path_to(pre)
29         path.append(node)
30         return path
```

Laufzeit?

Später: Kürzeste Pfade mit Kantengewichten

Azyklische Graphen

Graphen: Übersicht



Erkennung von azyklischen Graphen

Definition (Gerichteter, azyklischer Graph)

Ein **gerichteter, azyklischer Graph** (directed acyclic graph, DAG) ist ein gerichteter Graph, der keine gerichteten Zyklen enthält.

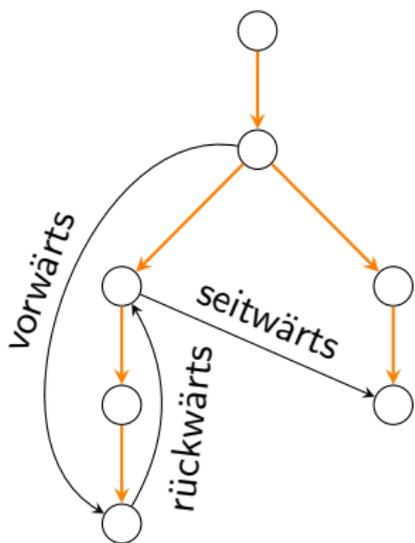
Erkennung von azyklischen Graphen

Definition (Gerichteter, azyklischer Graph)

Ein **gerichteter, azyklischer Graph** (directed acyclic graph, DAG) ist ein gerichteter Graph, der keine gerichteten Zyklen enthält.

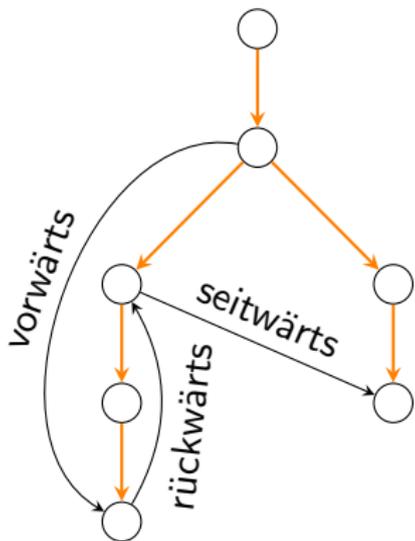
Aufgabe: Entscheide, ob ein gerichteter Graph einen Zyklus enthält. Falls ja, gib einen Zyklus aus.

Kriterium für Zyklfreiheit



Induzierter Suchbaum einer **Tiefensuche** (orange) und mögliche andere Kanten

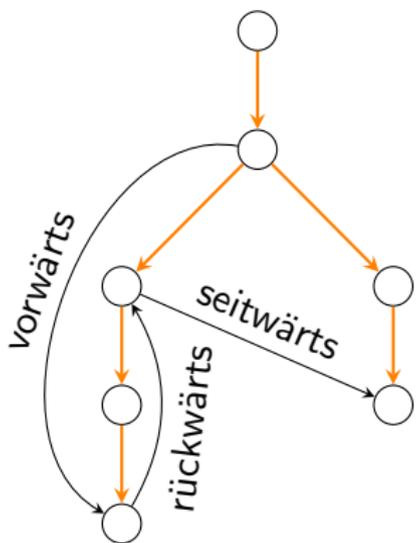
Kriterium für Zyklfreiheit



Induzierter Suchbaum einer **Tiefensuche** (orange) und mögliche andere Kanten

Der (erreichbare Teil-) Graph ist genau dann azyklisch, wenn **keine** Rückwärtskante existiert.

Kriterium für Zyklfreiheit



Induzierter Suchbaum einer **Tiefensuche** (orange) und mögliche andere Kanten

Der (erreichbare Teil-) Graph ist genau dann azyklisch, wenn **keine** Rückwärtskante existiert.

Idee: Merke dir Knoten auf aktuellem Pfad in Tiefensuche

Zykeltest: Algorithmus

```
1 class DirectedCycle:
2     def __init__(self, graph):
3         self.predecessor = [None] * graph.no_nodes()
4         self.on_current_path = [False] * graph.no_nodes()
5         self.cycle = None
6         for node in range(graph.no_nodes()):
7             if self.has_cycle():
8                 break
9             if self.predecessor[node] is None:
10                self.predecessor[node] = node
11                self.dfs(graph, node)
12
13     def has_cycle(self):
14         return self.cycle is not None
```

Wiederholte Tiefensuchen, so dass am Ende alle Knoten besucht wurden

Zykeltest: Algorithmus (Fortsetzung)

```
16     def dfs(self, graph, node):
17         self.on_current_path[node] = True
18         for s in graph.successors(node):
19             if self.has_cycle():
20                 return
21             if self.on_current_path[s]:
22                 self.predecessor[s] = node
23                 self.extract_cycle(s)
24             if self.predecessor[s] is None:
25                 self.predecessor[s] = node
26                 self.dfs(graph, s)
27         self.on_current_path[node] = False
```

Zykeltest: Algorithmus (Fortsetzung)

```
16 def dfs(self, graph, node):
17     self.on_current_path[node] = True
18     for s in graph.successors(node):
19         if self.has_cycle():
20             return
21         if self.on_current_path[s]:
22             self.predecessor[s] = node
23             self.extract_cycle(s)
24         if self.predecessor[s] is None:
25             self.predecessor[s] = node
26             self.dfs(graph, s)
27     self.on_current_path[node] = False
```

Aktualisiere, ob
Knoten auf aktuellem
Pfad ist.



Zykeltest: Algorithmus (Fortsetzung)

```
16     def dfs(self, graph, node):
17         self.on_current_path[node] = True
18         for s in graph.successors(node):
19             if self.has_cycle():
20                 return
21             if self.on_current_path[s]:
22                 self.predecessor[s] = node
23                 self.extract_cycle(s)
24             if self.predecessor[s] is None:
25                 self.predecessor[s] = node
26                 self.dfs(graph, s)
27         self.on_current_path[node] = False
```

Zyklus
gefunden →

Aktualisiere, ob
Knoten auf aktuellem
Pfad ist.

Zykeltest: Algorithmus (Fortsetzung)

```
16     def dfs(self, graph, node):
17         self.on_current_path[node] = True
18         for s in graph.successors(node):
19             if self.has_cycle():
20                 return
21             if self.on_current_path[s]:
22                 self.predecessor[s] = node
23                 self.extract_cycle(s)
24                 if self.predecessor[s] is None:
25                     self.predecessor[s] = node
26                     self.dfs(graph, s)
27         self.on_current_path[node] = False
```

Brich ab, wenn
irgendwo Zyklus
gefunden.

Aktualisiere, ob
Knoten auf aktuellem
Pfad ist.

Zyklus
gefunden

Zykeltest: Algorithmus (Fortsetzung)

Bei Aufruf von `extract_cycle` liegt `node` auf einem Zyklus in `self.predecessor`.

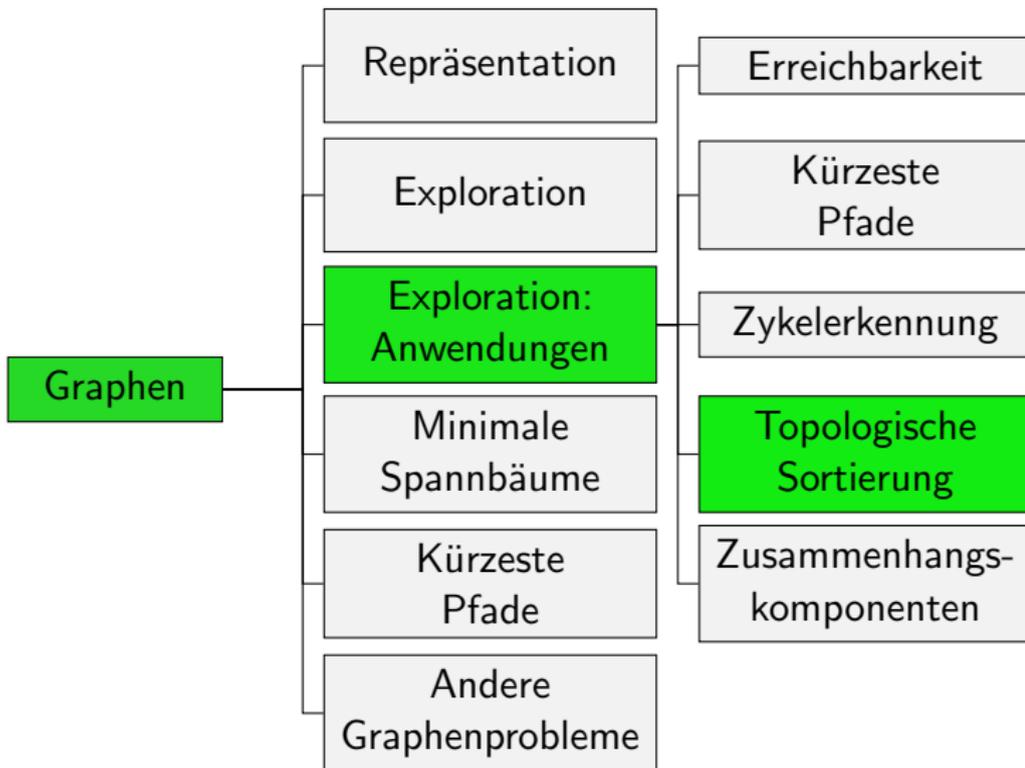
```
29     def extract_cycle(self, node):
30         self.cycle = deque()
31         current = node
32         self.cycle.appendleft(current)
33         while True:
34             current = self.predecessor[current]
35             self.cycle.appendleft(current)
36             if current == node:
37                 return
```

Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `graph_exploration_applications.ipynb`

Graphen: Übersicht



Topologische Sortierung

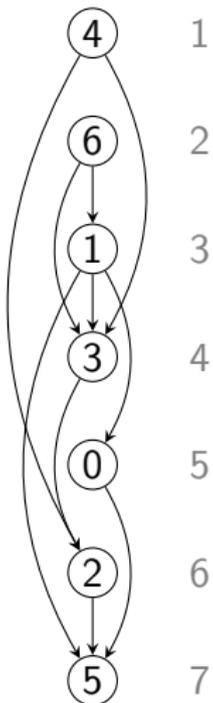
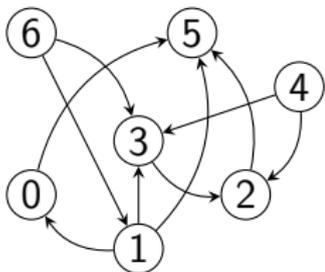
Definition

Eine **topologische Sortierung** eines **azyklischen**, gerichteten Graphen $G = (V, E)$, ist eine Nummerierung $no : V \rightarrow \mathbb{N}$ der Knoten, so dass für jede Kante (u, v) gilt, dass $no(u) < no(v)$.

Zum Beispiel relevant für **Ablaufplanung**:

Kante (u, v) drückt aus, dass u vor v „erledigt“ werden muss.

Topologische Sortierung: Illustration



Topologische Sortierung: Algorithmus

Theorem

Für den erreichbaren Teilgraphen eines azyklischen Graphen ist die **umgekehrte Depth-First-Postorder-Knotenreihenfolge** eine topologische Sortierung.

Algorithmus:

- Folge von Tiefensuchen-Aufrufen (für bisher unbesuchte Knoten) bis alle Knoten besucht.
- Speichere jeweils umgekehrte Postorderreihenfolge P_i für i -te Suche
- Sei k Anzahl der Suchen. Dann ergibt die Aneinanderreihung von P_k, \dots, P_1 eine topologische Sortierung.

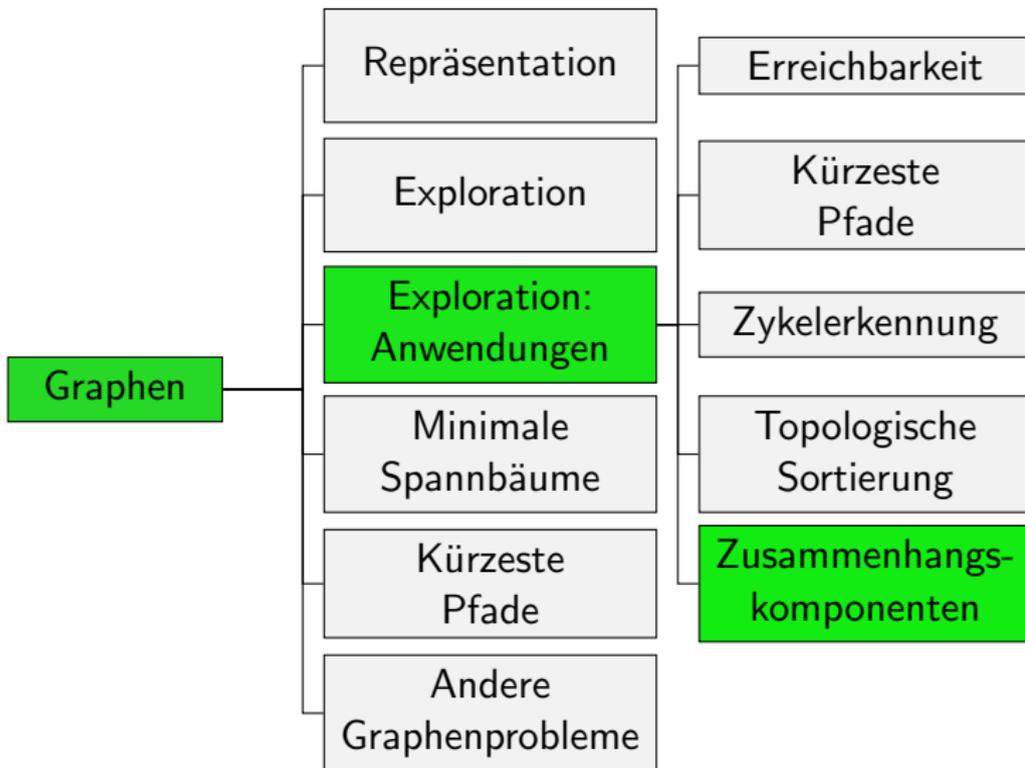
Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `graph_exploration_applications.ipynb`

Zusammenhang

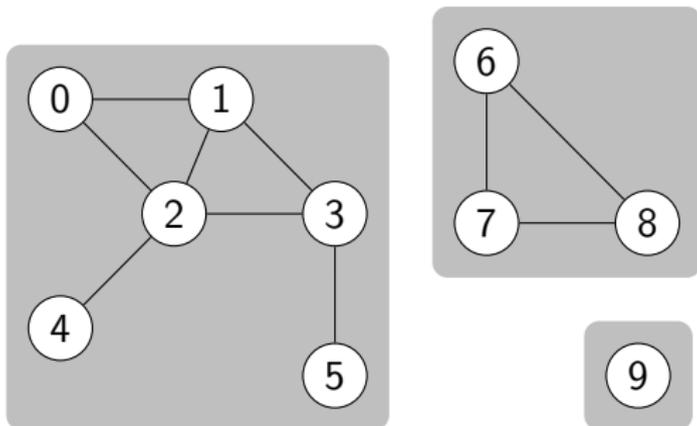
Graphen: Übersicht



Zusammenhangskomponenten ungerichteter Graphen

Ungerichteter Graph

- Zwei Knoten u und v sind in der gleichen **Zusammenhangskomponente**, wenn es einen Pfad zwischen u und v gibt.



Zusammenhangskomponenten: Interface

Wir möchten folgendes Interface implementieren:

```
1  class ConnectedComponents:
2      # Vorverarbeitender Konstruktor
3      def __init__(graph: UndirectedGraph) -> None
4
5      # Sind Knoten node1 und node2 verbunden?
6      def connected(node1: int, node2: int) -> bool
7
8      # Anzahl der Zusammenhangskomponenten
9      def count() -> int
10
11     # Komponentenbezeichner für node
12     # (zwischen 0 und count()-1)
13     def id(node: int) -> int
```

Zusammenhangskomponenten: Interface

Wir möchten folgendes Interface implementieren:

```
1  class ConnectedComponents:
2      # Vorverarbeitender Konstruktor
3      def __init__(graph: UndirectedGraph) -> None
4
5      # Sind Knoten node1 und node2 verbunden?
6      def connected(node1: int, node2: int) -> bool
7
8      # Anzahl der Zusammenhangskomponenten
9      def count() -> int
10
11     # Komponentenbezeichner für node
12     # (zwischen 0 und count()-1)
13     def id(node: int) -> int
```

Idee: Folge von Graphexplorationen bis alle Knoten besucht sind.
ID eines Knoten entspricht Iteration, in der er besucht wurde

Zusammenhangskomponenten: Algorithmus

```
1 class ConnectedComponents:
2     def __init__(self, graph):
3         self.id = [None] * graph.no_nodes()
4         self.curr_id = 0
5         visited = [False] * graph.no_nodes()
6         for node in range(graph.no_nodes()):
7             if not visited[node]:
8                 self.dfs(graph, node, visited)
9                 self.curr_id += 1
10
11     def dfs(self, graph, node, visited):
12         if visited[node]:
13             return
14         visited[node] = True
15         self.id[node] = self.curr_id
16         for n in graph.neighbours(node):
17             self.dfs(graph, n, visited)
```

Wie sehen connected, count und id aus?

Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `graph_exploration_applications.ipynb`

Zusammenhangskomponenten gerichteter Graphen

Gerichteter Graph G

- Ignoriert man die Richtung der Kanten, ist jede Zusammenhangskomponente des resultierenden ungerichteten Graphen eine **schwache Zusammenhangskomponente** von G .

Zusammenhangskomponenten gerichteter Graphen

Gerichteter Graph G

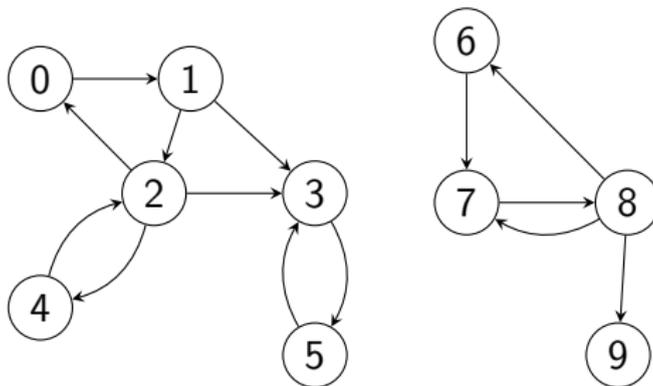
- Ignoriert man die Richtung der Kanten, ist jede Zusammenhangskomponente des resultierenden ungerichteten Graphen eine **schwache Zusammenhangskomponente** von G .
- G ist **stark zusammenhängend**, wenn von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten ein gerichteter Pfad existiert.

Zusammenhangskomponenten gerichteter Graphen

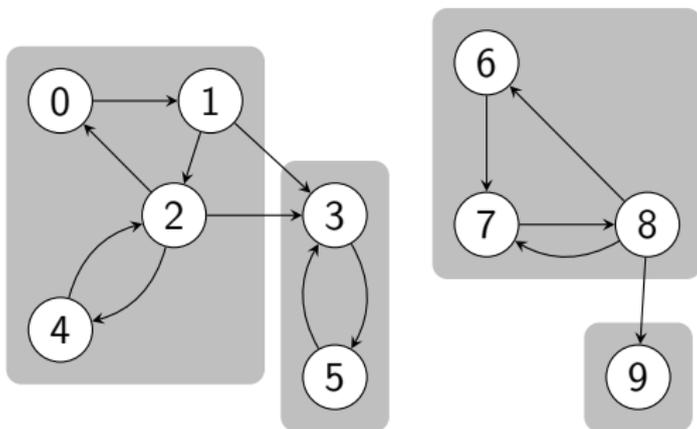
Gerichteter Graph G

- Ignoriert man die Richtung der Kanten, ist jede Zusammenhangskomponente des resultierenden ungerichteten Graphen eine **schwache Zusammenhangskomponente** von G .
- G ist **stark zusammenhängend**, wenn von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten ein gerichteter Pfad existiert.
- Eine **starke Zusammenhangskomponente** von G ist ein maximal grosser Teilgraph, der stark zusammenhängend ist.

Starke Zusammenhangskomponenten



Starke Zusammenhangskomponenten



Starke Zusammenhangskomponenten

Kosaraju-Algorithmus

- Gegeben Graph $G = (V, E)$, berechne zunächst ein umgekehrte Postorderreihenfolge P (für alle Knoten) des Graphen $G^R = (V, \{(v, u) \mid (u, v) \in E\})$ (alle Kanten umgedreht).
- Führe eine Folge von Explorationen in G aus. Wähle dabei als nächsten Startknoten jeweils den ersten noch unbesuchten Knoten in P .
- Alle Knoten, die innerhalb einer Exploration erreicht werden, sind in der gleichen starken Zusammenhangskomponente.

Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `graph_exploration_applications.ipynb`

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Wir haben eine Reihe von Anwendungen der Graphenexploration betrachtet:

- Erreichbarkeit
- Kürzeste Pfade
- Zykelerkennung
- Topologische Sortierung
- Zusammenhangskomponenten