

# Algorithmen und Datenstrukturen

## C2. Graphenexploration: Anwendungen

Gabriele Röger

Universität Basel

4. Mai 2023

# Algorithmen und Datenstrukturen

4. Mai 2023 — C2. Graphenexploration: Anwendungen

C2.1 Erreichbarkeit

C2.2 Kürzeste Pfade

C2.3 Azyklische Graphen

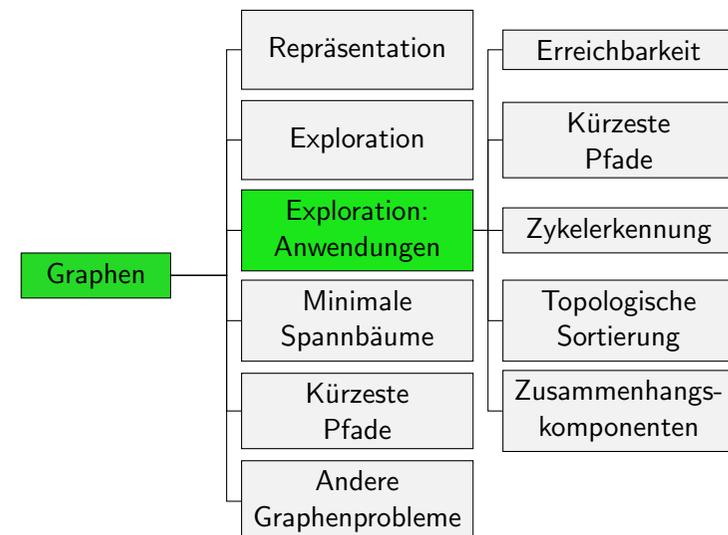
C2.4 Zusammenhang

C2.5 Zusammenfassung

## Erinnerung: Graphenexploration

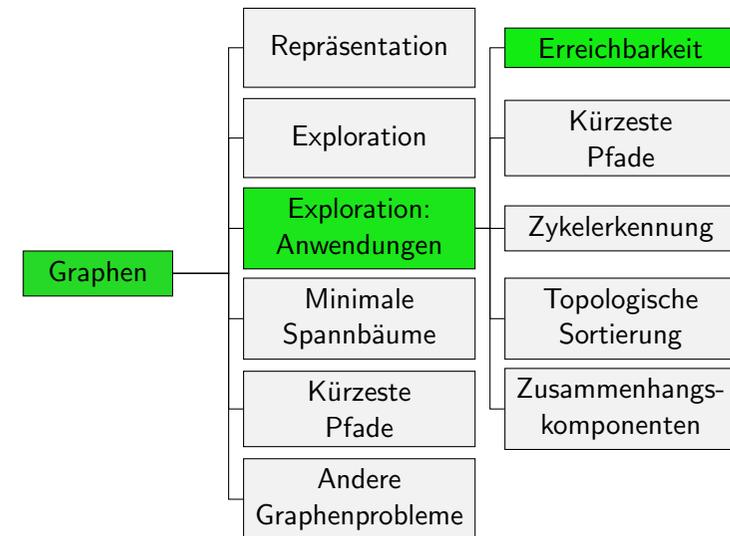
- ▶ **Aufgabe:** Gegeben einen Knoten  $v$ , besuche alle Knoten, die von  $v$  aus erreichbar sind.
- ▶ Wird oft als Teil anderer Graphenalgorithmien benötigt.
- ▶ **Tiefensuche:** erst einmal möglichst tief in den Graphen (weit weg von  $v$ )
- ▶ **Breitensuche:** erst alle Nachbarn, dann Nachbarn der Nachbarn, ...

## Graphen: Übersicht



## C2.1 Erreichbarkeit

## Graphen: Übersicht



## Mark-and-Sweep-Speicherbereinigung

**Ziel:** Gib Speicherplatz frei, der von nicht mehr zugreifbaren Objekten belegt wird.

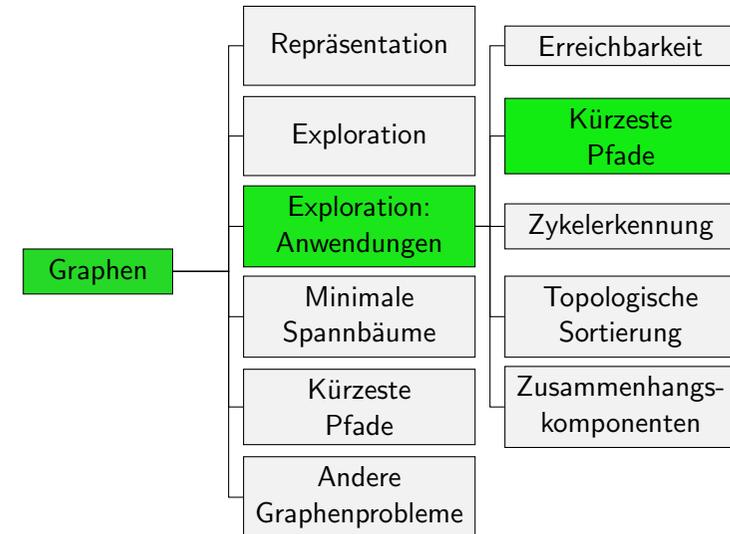
- ▶ Gerichteter Graph: **Objekte** als Knoten, **Referenzen auf Objekte** als Kanten
- ▶ Ein Bit pro Objekt für Markierung in Speicherbereinigung
- ▶ **Mark:** Markiere in regelmässigen Abständen alle erreichbaren Objekte.
- ▶ **Sweep:** Gib alle nicht markierten Objekte frei.

## Zauberstab in Bildbearbeitung



## C2.2 Kürzeste Pfade

## Graphen: Übersicht



## Kürzeste Pfade: Idee

- ▶ Breitensuche besucht die Knoten mit aufsteigendem (minimalen) Abstand vom Startknoten.
- ▶ Erster Besuch eines Knoten passiert auf kürzestem Pfad.
- ▶ **Idee:** Verwende Pfad aus induzierten Suchbaum

## Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `graph_exploration_applications.ipynb`

## Kürzeste-Pfade-Problem

### Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Startknoten

- ▶ Gegeben: Graph und Startknoten  $s$
- ▶ Anfrage für Knoten  $v$ 
  - ▶ Gibt es Pfad von  $s$  nach  $v$ ?
  - ▶ Wenn ja, was ist der kürzeste Pfad?
- ▶ Engl. *single-source shortest paths*, SSSP

## Kürzeste Pfade: Algorithmus

```

1 class SingleSourceShortestPaths:
2     def __init__(self, graph, start_node):
3         self.predecessor = [None] * graph.no_nodes()
4         self.predecessor[start_node] = start_node
5
6         # precompute predecessors with breadth-first search with
7         # self.predecessors used for detecting visited nodes
8         queue = deque()
9         queue.append(start_node)
10        while queue:
11            v = queue.popleft()
12            for s in graph.successors(v):
13                if self.predecessor[s] is None:
14                    self.predecessor[s] = v
15                    queue.append(s)
16        ...

```

Im Prinzip wie gehabt  
(nur als Klasse)

## Kürzeste Pfade: Algorithmus (Fortsetzung)

```

19     def has_path_to(self, node):
20         return self.predecessor[node] is not None
21
22     def get_path_to(self, node):
23         if not self.has_path_to(node):
24             return None
25         if self.predecessor[node] == node: # start node
26             return [node]
27         pre = self.predecessor[node]
28         path = self.get_path_to(pre)
29         path.append(node)
30         return path

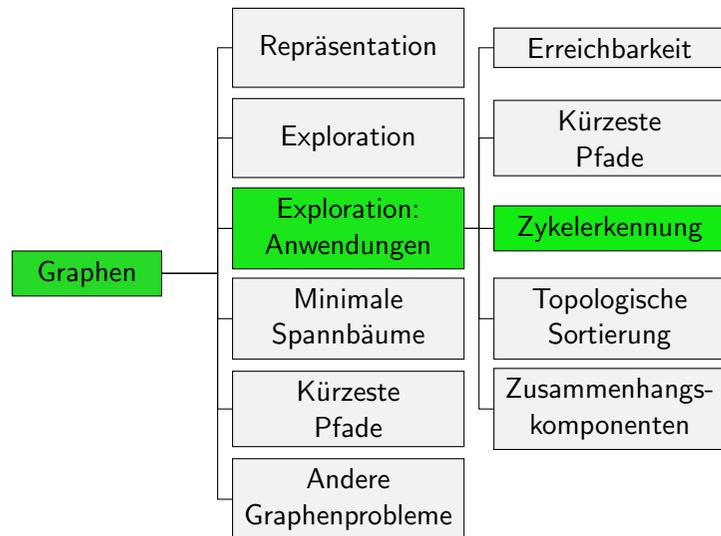
```

Laufzeit?

Später: Kürzeste Pfade mit Kantengewichten

## C2.3 Azyklische Graphen

## Graphen: Übersicht



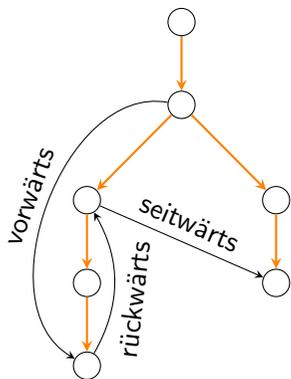
## Erkennung von azyklischen Graphen

### Definition (Gerichteter, azyklischer Graph)

Ein **gerichteter, azyklischer Graph** (directed acyclic graph, DAG) ist ein gerichteter Graph, der keine gerichteten Zyklen enthält.

**Aufgabe:** Entscheide, ob ein gerichteter Graph einen Zyklus enthält. Falls ja, gib einen Zyklus aus.

## Kriterium für Zyklfreiheit



Induzierter Suchbaum einer **Tiefensuche** (orange) und mögliche andere Kanten

Der (erreichbare Teil-) Graph ist genau dann azyklisch, wenn **keine** Rückwärtskante existiert.

**Idee:** Merke dir Knoten auf aktuellem Pfad in Tiefensuche

## Zykeltest: Algorithmus

```

1 class DirectedCycle:
2     def __init__(self, graph):
3         self.predecessor = [None] * graph.no_nodes()
4         self.on_current_path = [False] * graph.no_nodes()
5         self.cycle = None
6         for node in range(graph.no_nodes()):
7             if self.has_cycle():
8                 break
9             if self.predecessor[node] is None:
10                self.predecessor[node] = node
11                self.dfs(graph, node)
12
13     def has_cycle(self):
14         return self.cycle is not None
  
```

Wiederholte Tiefensuchen, so dass am Ende alle Knoten besucht wurden

## Zykeltest: Algorithmus (Fortsetzung)

```

16 def dfs(self, graph, node):
17     self.on_current_path[node] = True
18     for s in graph.successors(node):
19         if self.has_cycle():
20             return
21         if self.on_current_path[s]:
22             self.predecessor[s] = node
23             self.extract_cycle(s)
24             if self.predecessor[s] is None:
25                 self.predecessor[s] = node
26                 self.dfs(graph, s)
27     self.on_current_path[node] = False

```

Brich ab, wenn irgendwo Zyklus gefunden.

Zyklus gefunden

Aktualisiere, ob Knoten auf aktuellem Pfad ist.

## Zykeltest: Algorithmus (Fortsetzung)

Bei Aufruf von `extract_cycle` liegt `node` auf einem Zyklus in `self.predecessor`.

```

29 def extract_cycle(self, node):
30     self.cycle = deque()
31     current = node
32     self.cycle.appendleft(current)
33     while True:
34         current = self.predecessor[current]
35         self.cycle.appendleft(current)
36         if current == node:
37             return

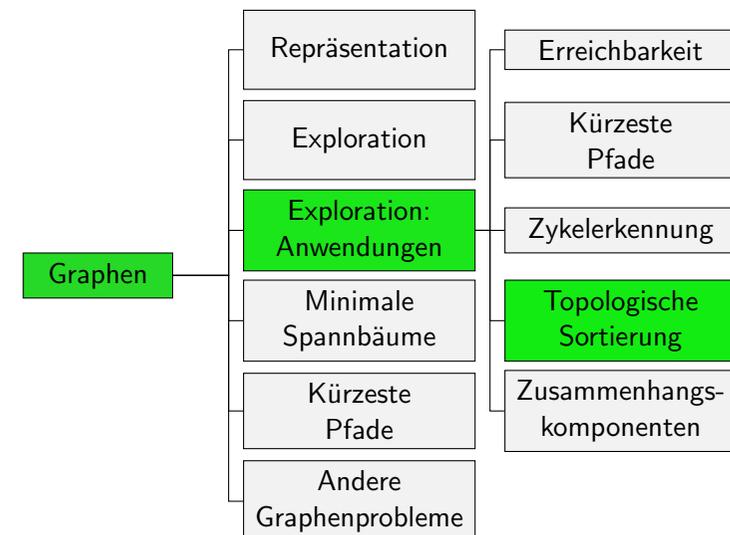
```

## Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `graph_exploration_applications.ipynb`

## Graphen: Übersicht



## Topologische Sortierung

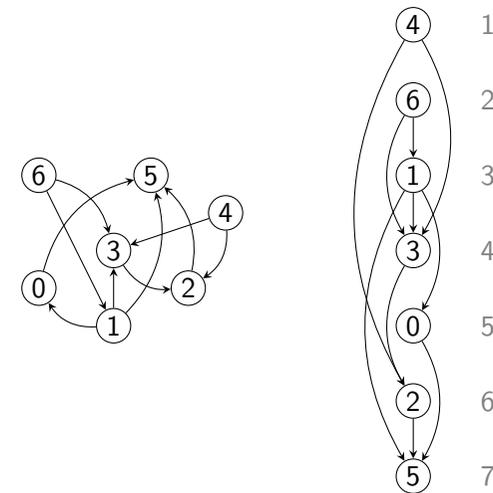
### Definition

Eine **topologische Sortierung** eines **azyklischen**, gerichteten Graphen  $G = (V, E)$ , ist eine Nummerierung  $no : V \rightarrow \mathbb{N}$  der Knoten, so dass für jede Kante  $(u, v)$  gilt, dass  $no(u) < no(v)$ .

Zum Beispiel relevant für **Ablaufplanung**:

Kante  $(u, v)$  drückt aus, dass  $u$  vor  $v$  „erledigt“ werden muss.

## Topologische Sortierung: Illustration



## Topologische Sortierung: Algorithmus

### Theorem

Für den erreichbaren Teilgraphen eines azyklischen Graphen ist die **umgekehrte Depth-First-Postorder-Knotenreihenfolge** eine topologische Sortierung.

Algorithmus:

- ▶ Folge von Tiefensuchen-Aufrufen (für bisher unbesuchte Knoten) bis alle Knoten besucht.
- ▶ Speichere jeweils umgekehrte Postorderreihenfolge  $P_i$  für  $i$ -te Suche
- ▶ Sei  $k$  Anzahl der Suchen. Dann ergibt die Aneinanderreihung von  $P_k, \dots, P_1$  eine topologische Sortierung.

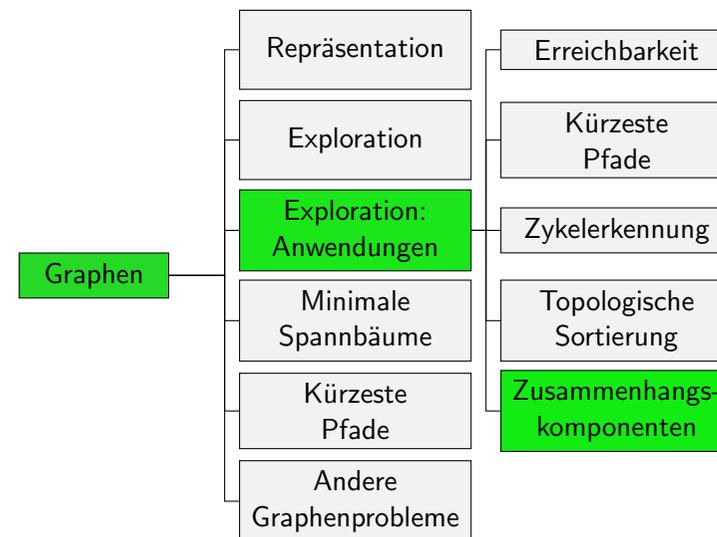
## Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `graph_exploration_applications.ipynb`

## C2.4 Zusammenhang

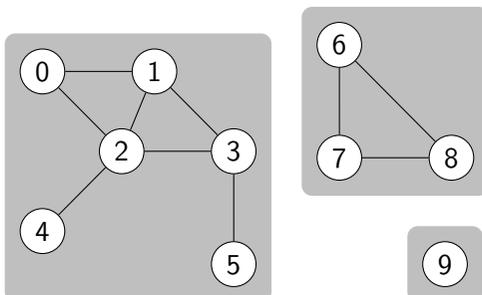
## Graphen: Übersicht



## Zusammenhangskomponenten ungerichteter Graphen

### Ungerichteter Graph

- ▶ Zwei Knoten  $u$  und  $v$  sind in der gleichen **Zusammenhangskomponente**, wenn es einen Pfad zwischen  $u$  und  $v$  gibt.



## Zusammenhangskomponenten: Interface

Wir möchten folgendes Interface implementieren:

```

1 class ConnectedComponents:
2     # Vorverarbeitender Konstruktor
3     def __init__(graph: UndirectedGraph) -> None
4
5     # Sind Knoten node1 und node2 verbunden?
6     def connected(node1: int, node2: int) -> bool
7
8     # Anzahl der Zusammenhangskomponenten
9     def count() -> int
10
11     # Komponentenbezeichner für node
12     # (zwischen 0 und count()-1)
13     def id(node: int) -> int
  
```

**Idee:** Folge von Graphexplorationen bis alle Knoten besucht sind.  
ID eines Knoten entspricht Iteration, in der er besucht wurde

## Zusammenhangskomponenten: Algorithmus

```

1 class ConnectedComponents:
2     def __init__(self, graph):
3         self.id = [None] * graph.no_nodes()
4         self.curr_id = 0
5         visited = [False] * graph.no_nodes()
6         for node in range(graph.no_nodes()):
7             if not visited[node]:
8                 self.dfs(graph, node, visited)
9                 self.curr_id += 1
10
11     def dfs(self, graph, node, visited):
12         if visited[node]:
13             return
14         visited[node] = True
15         self.id[node] = self.curr_id
16         for n in graph.neighbours(node):
17             self.dfs(graph, n, visited)

```

Wie sehen `connected`, `count` und `id` aus?

## Jupyter-Notebook



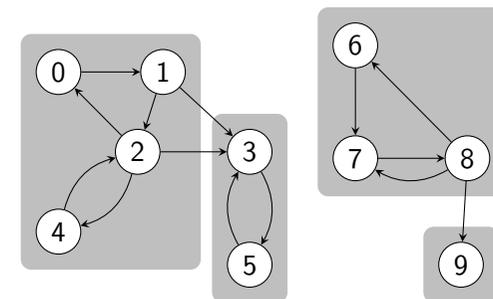
Jupyter-Notebook: `graph_exploration_applications.ipynb`

## Zusammenhangskomponenten gerichteter Graphen

### Gerichteter Graph $G$

- ▶ Ignoriert man die Richtung der Kanten, ist jede Zusammenhangskomponente des resultierenden ungerichteten Graphen eine **schwache Zusammenhangskomponente** von  $G$ .
- ▶  $G$  ist **stark zusammenhängend**, wenn von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten ein gerichteter Pfad existiert.
- ▶ Eine **starke Zusammenhangskomponente** von  $G$  ist ein maximal grosser Teilgraph, der stark zusammenhängend ist.

## Starke Zusammenhangskomponenten



## Starke Zusammenhangskomponenten

### Kosaraju-Algorithmus

- ▶ Gegeben Graph  $G = (V, E)$ , berechne zunächst ein umgekehrte Postorderreihenfolge  $P$  (für alle Knoten) des Graphen  $G^R = (V, \{(v, u) \mid (u, v) \in E\})$  (alle Kanten umgedreht).
- ▶ Führe eine Folge von Explorationen in  $G$  aus. Wähle dabei als nächsten Startknoten jeweils den ersten noch unbesuchten Knoten in  $P$ .
- ▶ Alle Knoten, die innerhalb einer Exploration erreicht werden, sind in der gleichen starken Zusammenhangskomponente.

## Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `graph_exploration_applications.ipynb`

## C2.5 Zusammenfassung

## Zusammenfassung

Wir haben eine Reihe von Anwendungen der Graphenexploration betrachtet:

- ▶ Erreichbarkeit
- ▶ Kürzeste Pfade
- ▶ Zykelerkennung
- ▶ Topologische Sortierung
- ▶ Zusammenhangskomponenten