

Algorithmen und Datenstrukturen

C1. Graphen: Grundlagen und Exploration

Gabriele Röger

Universität Basel

3. Mai 2023

Algorithmen und Datenstrukturen

3. Mai 2023 — C1. Graphen: Grundlagen und Exploration

C1.1 Motivation

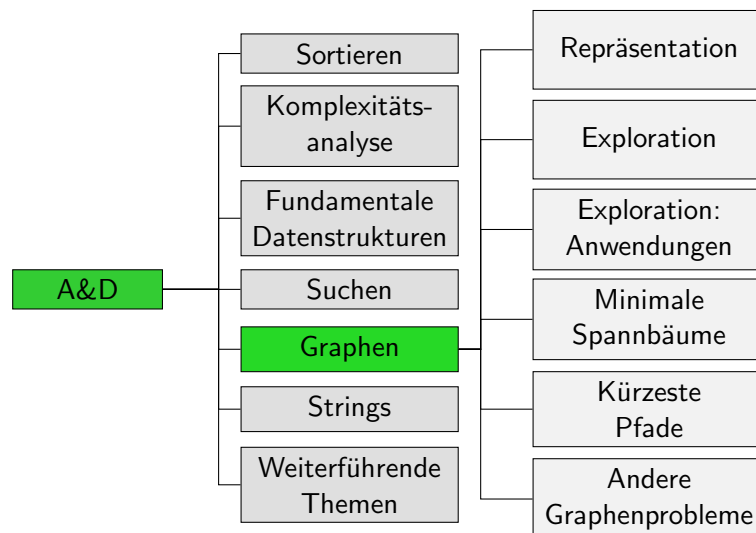
C1.2 Grundlegende Definition

C1.3 Repräsentation

C1.4 Graphenexploration

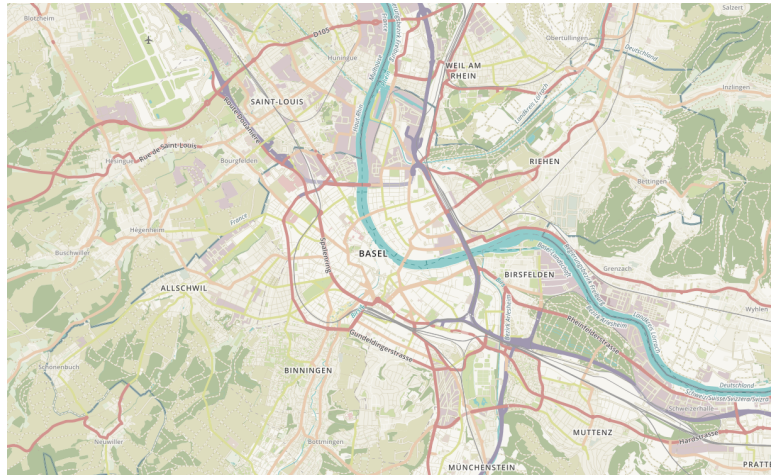
C1.5 Zusammenfassung

Inhalt dieser Veranstaltung



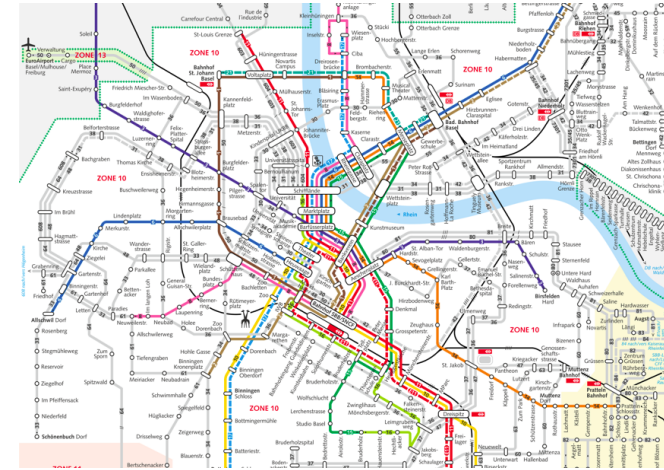
C1.1 Motivation

Strassenkarten



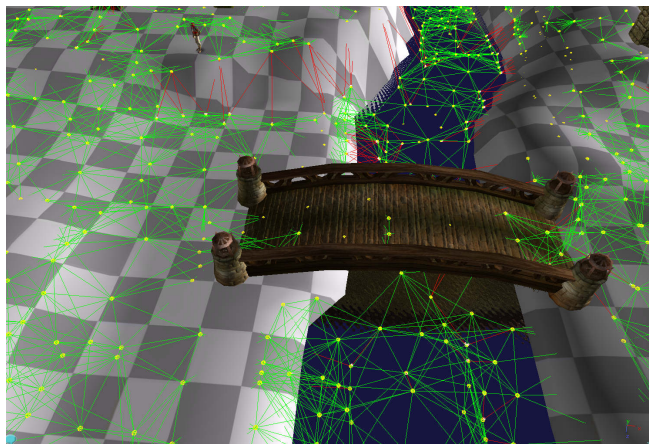
openstreetmap.org

Liniennetz



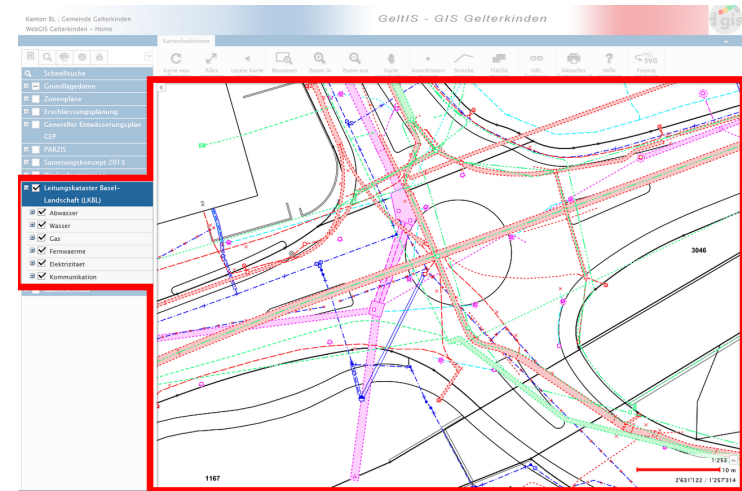
tnw.ch

Navigationsnetz in Spielen



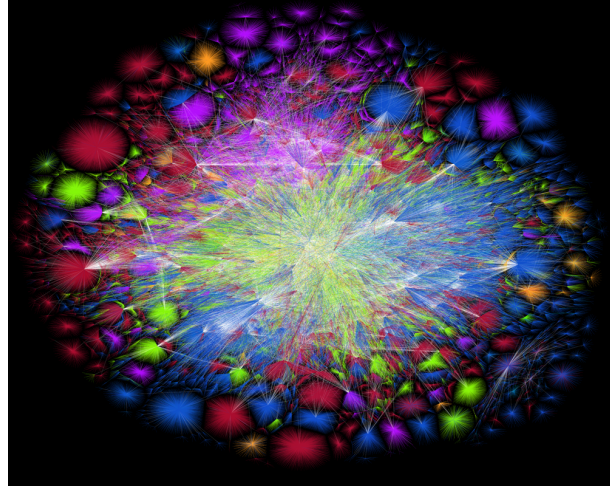
heroengine.com

Versorgungssystem



dgis.info

Internet



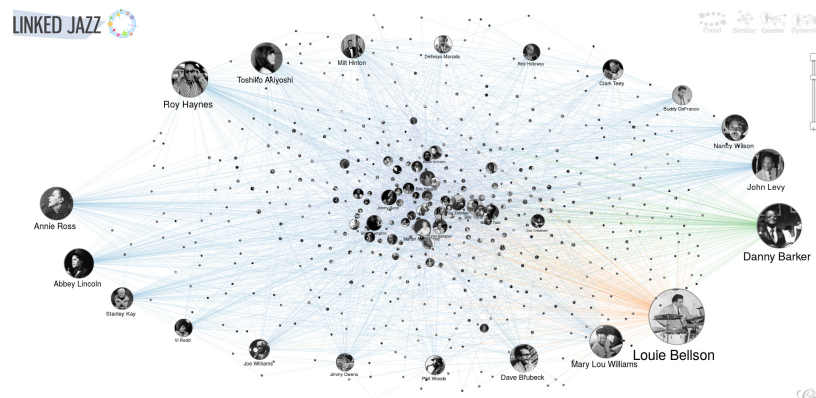
Barrett Lyon / The Opte Project
Visualization of the routing paths of the Internet.

Soziale Netzwerke



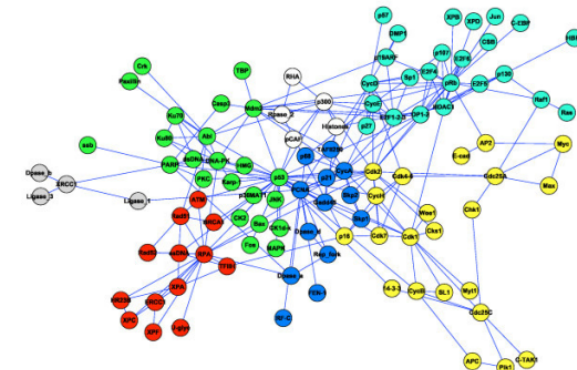
„Visualizing Friendships“ von Paul Butler

Zusammenarbeit



linkedjazz.org

Protein-Interaktion



Network representation of the p53 protein interactions

Module detection in complex networks using integer optimisation,
Xu G, Bennett L, Papageorgiou LG, Tsoka S - Algorithms Mol Biol (2010)

Mögliche Fragestellungen

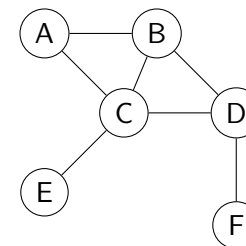
- ▶ Sind A und B verbunden?
- ▶ Was ist der kürzeste Weg zwischen A und B?
- ▶ Wie weit sind zwei Elemente höchstens voneinander entfernt?
- ▶ Wieviel Wasser kann die Kanalisation abführen?

Abstrakte Graphen

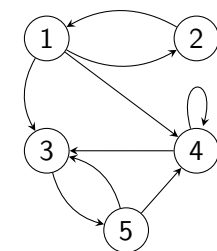
Ein **Graph** besteht aus **Knoten** und **Kanten** zwischen Knoten.

| | Knoten | Kanten |
|----------|--------------------------|-------------------|
| Strassen | Kreuzung | Strassenabschnitt |
| Internet | AS (\approx Provider) | Route |
| Facebook | Person | Freundschaft |
| Proteine | Protein | Interaktion |

C1.2 Grundlegende Definition



ungerichteter Graph



gerichteter Graph

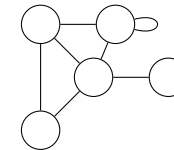
Ungerichtete und gerichtete Graphen

Graphen

- ▶ Ein Graph besteht aus zwei Mengen V und E
 - ▶ V : Menge der **Knoten** (engl. vertices)
 - ▶ E : Menge der **Kanten** (engl. edges)
- ▶ Jede Kante verbindet zwei Knoten u und v
 - ▶ ungerichteter Graph: **Menge** $\{u, v\}$
 - ▶ gerichteter Graph: **Paar** (u, v)
- ▶ Bei **Multigraphen** kann es mehrere, parallele Kanten zwischen den gleichen Knoten geben.
- ▶ Bei **gewichteten** Graphen hat jede Kante ein Gewicht (Zahl).

Ungerichtete Graphen: Terminologie

- ▶ **Nachbarn** eines Knotens u : alle Knoten v mit $\{u, v\} \in E$.
- ▶ $\text{degree}(v)$: **Grad** eines Knotens = **Anzahl der Nachbarn**.
 - ▶ Ausnahme: **Schleife** erhöht den Grad um 2.
Schleife = Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet.

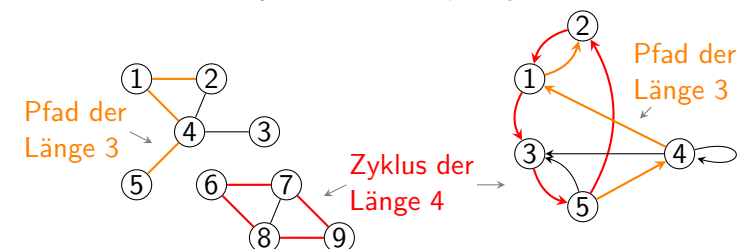


Gerichtete Graphen: Terminologie

- ▶ **Nachfolger** eines Knotens u : alle Knoten v mit $(u, v) \in E$.
- ▶ **Vorgänger** eines Knotens u : alle Knoten v mit $(v, u) \in E$.
- ▶ $\text{outdegree}(v)$: **Ausgangsgrad** = Anzahl der **Nachfolger**
- ▶ $\text{indegree}(v)$: **Eingangsgrad** = Anzahl der **Vorgänger**

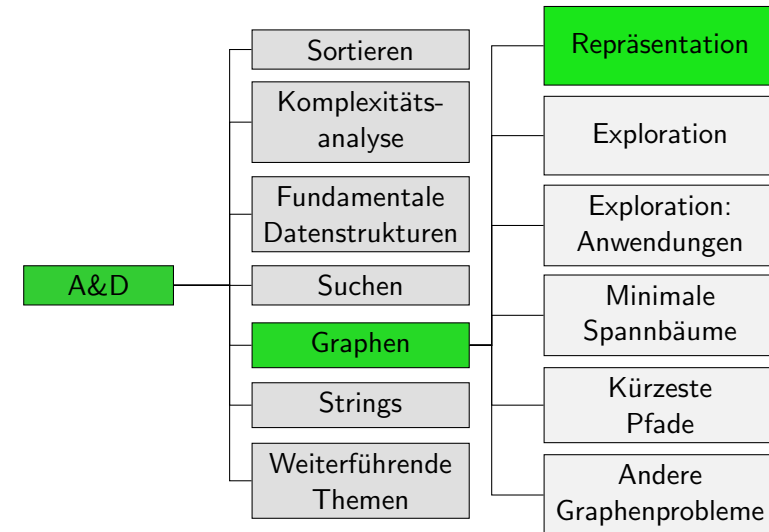
Pfade und Zyklen

- ▶ **Pfad der Länge n** : Sequenz (v_0, \dots, v_n) von Knoten mit
 - ▶ $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \dots, n-1$ (ungerichteter Graph)
 - ▶ $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, n-1$ (gerichteter Graph)
 - ▶ **Beispiel**: $(5, 4, 1, 2)$
- ▶ **Zyklus**: Pfad mit gleichem Start- und Endknoten, der keine Kante mehrmals verwendet.
 - ▶ $(6, 7, 9, 8, 6)$ im ungerichteten und $(5, 2, 1, 3, 5)$ im gerichteten Beispielgraphen
 - ▶ existiert kein Zyklus, ist der Graph **azyklisch**



C1.3 Repräsentation

Inhalt dieser Veranstaltung



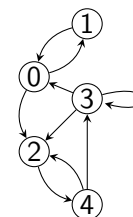
Repräsentation der Knoten

- ▶ Wir verwenden Zahlen von 0 bis $|V| - 1$ für die Knoten.
- ▶ Falls in Anwendung nicht gegeben: Verwende Symboltabellen, um zwischen Namen und Zahlen zu konvertieren.

Graphenrepräsentation mit Adjazenzmatrix

Graph $G = (\{0, \dots, |V| - 1\}, E)$ repräsentiert durch $|V| \times |V|$ -Matrix mit Einträgen a_{ik} (in Zeile i , Spalte k):

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, k) \in E \text{ (gerichteter Graph) bzw.} \\ & \{i, k\} \in E \text{ (ungerichteter Graph)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

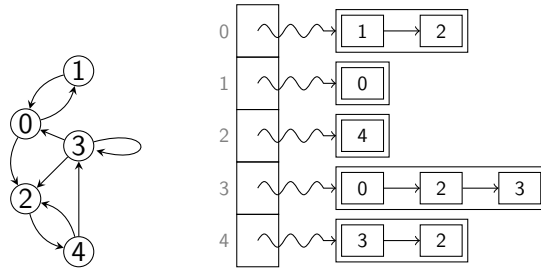


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bei ungerichteten Graphen symmetrisch

Graphenrepräsentation mit Adjazenzliste

Speichere für jeden Knoten die Liste aller Nachfolger / Nachbarn



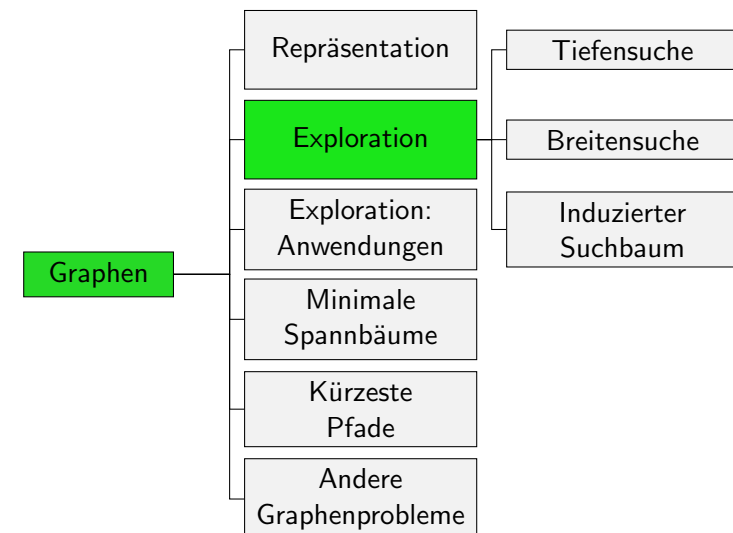
Repräsentation: Komplexität

| | Adj.matrix | Adj.liste |
|-------------------------------|------------|--------------------|
| Platzbedarf | $ V ^2$ | $ E + V $ |
| Kante hinzufügen | 1 | 1 |
| Kante zwischen u und v ? | 1 | (out)degree(v) |
| Iterieren über ausgeh. Kanten | $ V $ | (out)degree(v) |

Praxis: oft **dünne** Graphen (geringer durchschnittlicher Grad)
Welche Repräsentation?

C1.4 Graphenexploration

Graphen: Übersicht



Graphenexploration

- ▶ **Aufgabe:** Gegeben einen Knoten v , besuche alle Knoten, die von v aus erreichbar sind.
- ▶ Wird oft als Teil anderer Graphenalgorithmien benötigt.
- ▶ **Tiefensuche:** erst einmal möglichst tief in den Graphen (weit weg von v)
- ▶ **Breitensuche:** erst alle Nachbarn, dann Nachbarn der Nachbarn, ...

Tiefensuche

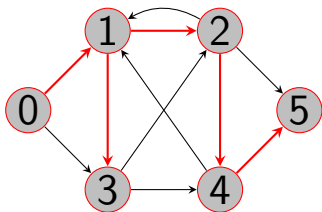
Markiere erreichte Knoten

- ▶ Markiere v
- ▶ Iteriere über die Nachfolger/Nachbarn w von v .
 - ▶ Falls w nicht markiert, starte rekursiv von w .

Englisch: **Depth-first search, DFS**

Tiefensuche: Beispiel

Hier: Besuche Nachfolger mit aufsteigender Knotennummer



Tiefensuche mit Startknoten 0
markiert Knoten in Reihenfolge
0 - 1 - 2 - 4 - 5 - 3

Tiefensuche: Algorithmus (rekursiv)

```

1 def depth_first_exploration(graph, node, visited=None):
2     if visited is None:
3         visited = set()
4     if node in visited:
5         return
6     visited.add(node)
7     for s in graph.successors(node):
8         depth_first_exploration(graph, s, visited)

```

Falls zu erwarten ist, dass ein Grossteil der Knoten besucht wird:
bool-Array statt Menge für `visited`

Depth-First-Knotenreihenfolgen

- ▶ **Preorder:** Knoten wird erfasst, bevor seine Kinder betrachtet werden.
- ▶ **Postorder:** Knoten wird erfasst, wenn die (rekursive) Tiefensuche mit allen seinen Kindern fertig ist.
- ▶ **Umgekehrte Postorder:** Wie Postorder, aber in umgekehrter Reihenfolge (spätere Knoten vorne)

```

1 def depth_first_exploration(graph, node):
2     if node in visited:
3         return
4     preorder.append(node)
5     visited.add(node)
6     for s in graph.successors(node):
7         depth_first_exploration(graph, s, visited)
8     postorder.append(node)
9     reverse_postorder.appendleft(node)

```

(Repräsentation der Knotenreihenfolgen als Deque)

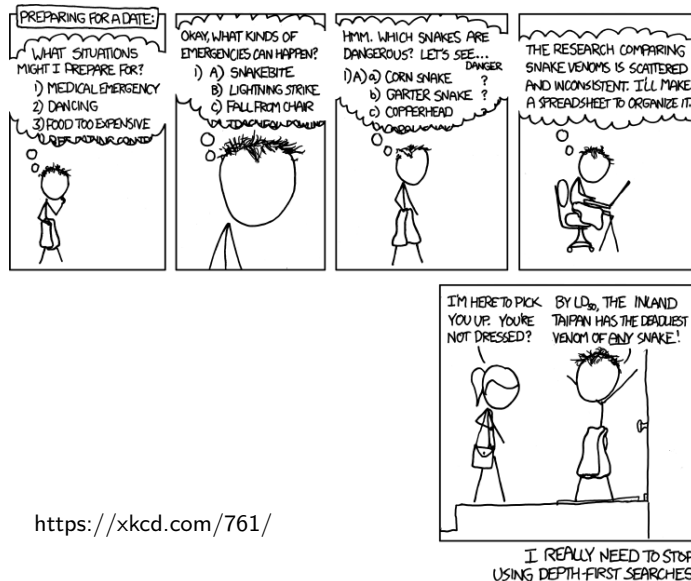
Tiefensuche: Algorithmus (iterativ)

```

1 def depth_first_exploration(graph, node):
2     visited = set()
3     stack = deque()
4     stack.append(node)
5     while stack:
6         v = stack.pop() # LIFO
7         if v not in visited:
8             visited.add(v)
9             for s in graph.successors(v):
10                stack.append(s)

```

Tiefensuche in der Praxis



<https://xkcd.com/761/>

Breitensuche

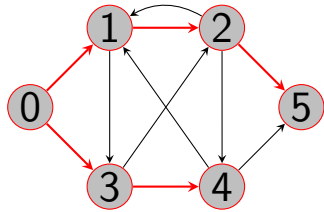
Erst alle Nachbarn, dann Nachbarn der Nachbarn, ...

- ▶ Markiere v
→ Abstand 0
- ▶ Markiere alle unmarkierten Nachfolger/Nachbarn von v
→ Abstand 1
- ▶ Markiere alle unmarkierten Nachfolger/Nachbarn von Abstand-1-Knoten
- ▶ Markiere alle unmarkierten Nachfolger/Nachbarn von Abstand-2-Knoten
- ▶ ...
- ▶ Bis Abstand- i -Knoten keine unmarkierten Nachfolger/Nachbarn haben

Englisch: **Breadth-first search, BFS**

Breitensuche: Beispiel

Hier: Besuche Nachfolger mit aufsteigender Knotennummer



Breitensuche mit Startknoten
0 markiert Knoten in
Reihenfolge
0 - 1 - 3 - 2 - 4 - 5

Breitensuche: Algorithmus (konzeptionell)

Einzigster Unterschied zu iterativem Tiefensuchalgorithmus:
First-in-first-out-Behandlung der Knoten (statt last-in-first-out)

```

1 def breadth_first_exploration(graph, node):
2     visited = set()
3     queue = deque()
4     queue.append(node)
5     while queue:
6         v = queue.popleft() # FIFO
7         if v not in visited:
8             visited.add(v)
9             for s in graph.successors(v):
10                queue.append(s)

```

Breitensuche: Algorithmus (etwas effizienter)

Nur erstes Antreffen eines Knotens wird weiterbetrachtet.
Wir können den Knoten direkt markieren und ihn bei einem
weiteren Antreffen sofort verwerfen.

```

1 def breadth_first_exploration(graph, node):
2     visited = set()
3     queue = deque()
4     visited.add(node)
5     queue.append(node)
6     while queue:
7         v = queue.popleft()
8         for s in graph.successors(v):
9             if s not in visited:
10                visited.add(s)
11                queue.append(s)

```

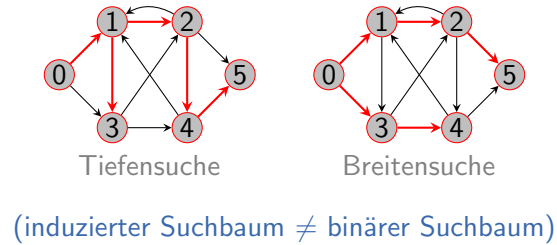
Laufzeit

Bei allen Algorithmenvarianten:

- ▶ Jeder erreichbare Knoten wird markiert.
- ▶ Man folgt jeder erreichbaren Kante einmal.
- ▶ Laufzeit $O(|V| + |E|)$
 - ▶ kann man auf erreichbare Knoten und Kanten einschränken

Induzierter Suchbaum

Der **induzierte Suchbaum** einer Graphenexploration enthält zu jedem besuchten Knoten (ausser dem Startknoten) eine Kante von dessen Vorgänger in der Exploration.



Induzierter Suchbaum: Beispiel Breitensuche

- ▶ Jeder Knoten hat höchstens einen Vorgänger im Baum.
- ▶ Repräsentiere induzierten Suchbaum durch Vorgängerrelation
- ▶ Besuchte Knoten sind genau die, für die Vorgänger gesetzt ist: Verzierte auf visited.

```

1 def bfs_with_predecessors(graph, node):
2     predecessor = [None] * graph.no_nodes()
3     queue = deque()
4     # use self-loop for start node
5     predecessor[node] = node
6     queue.append(node)
7     while queue:
8         v = queue.popleft()
9         for s in graph.successors(v):
10            if predecessor[s] is None:
11                predecessor[s] = v
12                queue.append(s)

```

C1.5 Zusammenfassung

- ▶ Graphen bestehen aus **Knoten** und **Kanten**
- ▶ Kanten können **gerichtet** oder **ungerichtet** sein.
- ▶ **Graphenexploration** besucht systematisch alle Knoten, die von einem bestimmten Knoten erreichbar sind.
 - ▶ **Tiefensuche** geht zuerst in die „Tiefe“.
 - ▶ **Breitensuche** besucht zuerst die Knoten, die näher am Startknoten sind.