

Algorithmen und Datenstrukturen

B7. Hashtabellen¹

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

27. April 2023

¹ Folien basieren auf Vorlesungsfolien von Sedgewick & Wayne
<https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/34Hashtables-2x2.pdf>

Einführung

Symboltabellen: Übersicht

Implementation	Worst-case			Average-case		
	suchen	einfügen	löschen	suchen (hit)	einfügen	löschen
Verkettete Liste	N	N	N	N/2	N	N/2
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	N	$\log_2(N)$	$N/2$	N
BST	N	N	N	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	\sqrt{N}
Rot-Schwarz Bäume	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$

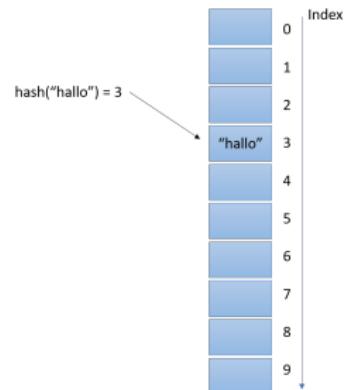
Frage

Geht es noch besser?

Hashtabellen: Idee

Elemente werden in Array gespeichert, wobei Position durch Schlüssel bestimmt ist.

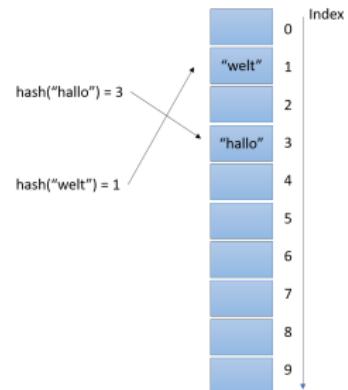
- Wichtigstes Werkzeug: Hashfunktion
 - Berechnet Index aus Schlüssel



Hashtabellen: Idee

Elemente werden in Array gespeichert, wobei Position durch Schlüssel bestimmt ist.

- Wichtigstes Werkzeug: Hashfunktion
 - Berechnet Index aus Schlüssel



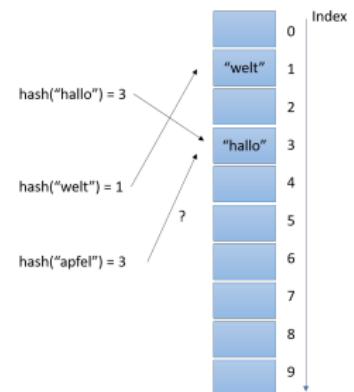
Hashtabellen: Idee

Elemente werden in Array gespeichert, wobei Position durch Schlüssel bestimmt ist.

- Wichtigstes Werkzeug: Hashfunktion
 - Berechnet Index aus Schlüssel

Herausforderungen:

- Hashfunktion berechnen
- Kollisionen (2 unterschiedliche Schlüssel haben gleichen Hashwert)



Hashfunktionen

Hashfunktion: Ziele

- Konsistenz: Gleicher Schlüssel sollte immer gleichen Hashwert ergeben.
- Hashfunktion sollte effizient berechnet werden können.
- Schlüssel sollten gleichverteilt sein.
 - gleiche Wahrscheinlichkeit für jedes Feld

Quiz: Hashfunktion

Was sind mögliche Hashfunktionen für

- Integer (32 Bit Ganzzahl)
- Datum
- Strings
- Bilder

Wie aufwändig ist jeweils die Berechnung der Hashfunktion?

Hashfunktionen in Java

Alle Java Klassen erben Methode `hashCode`

Anforderung:

- Falls `x.equals(y)` dann `x.hashCode() == y.hashCode()`

Gewünscht:

- Falls `!x.equals(y)` dann `x.hashCode() != y.hashCode()`

Wenn immer `equals` überschrieben wird, muss auch `hashCode` überschrieben werden.

Beispiele von Hashfunktionen in Java

Integer:

```
public int hashCode() {  
    return this.value;  
}
```

Beispiele von Hashfunktionen in Java

String:

```
public int hashCode() {  
    int h = 0;  
    if (value.length > 0) {  
        char val[] = value;  
  
        for (int i = 0; i < value.length; i++) {  
            h = 31 * h + val[i];  
        }  
    }  
    return h;  
}
```

Beispiele von Hashfunktionen in Java

LinkedList:

```
public int hashCode() {  
    int hashCode = 1;  
    for (E e : this)  
        hashCode = 31 * hashCode + (e==null ? 0 : e.hashCode());  
    return hashCode;  
}
```

Praktisches Rezept für benutzerdefinierte Typen

```
public int hashCode()
{
    int hash = 17;
    hash = 31*hash + field1.hashCode();
    hash = 31*hash + field2.hashCode();
    hash = 31*hash + field3.hashCode();
    ...
    return hash;
}
```

Funktioniert gut in Praxis - aber theoretisch nicht optimal.

Praktische Tips

Gute Hashfunktionen zu entwerfen ist schwierig!

Einige Tips:

- Alle Bits im Schlüssel sollten bei Berechnung gleich mitberücksichtigt werden.
 - Verbessert Verteilung!
 - Experimentell überprüfen (plot?)
- Hashing ist klassischer Performancebug. (Alles läuft korrekt aber Programm ist langsam.)
 - Hashfunktion auf Effizienz prüfen.
 - Was ist schneller, Vergleich oder Hash?

Hashfunktionen in Python

- Hashfunktionen werden via die Methode `__hash__` angegeben.

`__hash__()`

Called by built-in function `hash()` and for operations on members of hashed collections including `set`, `frozenset`, and `dict`. `__hash__()` should return an integer. The only required property is that objects which compare equal have the same hash value; it is advised to mix together the hash values of the components of the object that also play a part in comparison of objects by packing them into a tuple and hashing the tuple.

Python Language Reference - Section 3: Data Model

Modulares Hashing

Werte der Hashfunktion können negativ sein. Wir wollen aber Werte zwischen 0 und M .

- Positiven Hash-wert nehmen und Modulo M rechnen.

In Java:

```
private int modularHash(Key x) {  
    return (x.hashCode() & 0xffffffff) % M;  
}
```

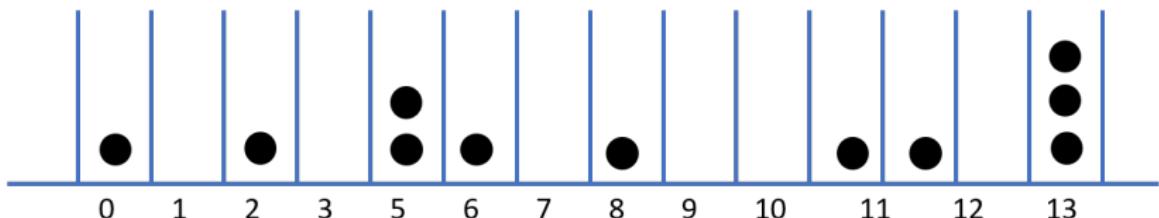
In Python:

```
def modularHash(x):  
    return (hash(x) % ((sys.maxsize + 1) * 2) % M)
```

Theoretische Analyse von Hashtabellen

Typische Annahme

Die von uns verwendeten Hashfunktionen verteilen die Schlüssel gleichmäßig und unabhängig voneinander auf die Integer-Werte zwischen 0 und $M - 1$.



Bälle werden zufällig in M verschiedene Gefäße verteilt.

Kollisionen

Wir können Kollisionen nicht verhindern.

Beispiele relevanter mathematischer Resultate:

Geburtstagsparadox In einer Gruppe von 23 Kindern ist die Wahrscheinlichkeit 0.5, dass zwei am selben Tag Geburtstag haben.

- Angewandt auf hashing: Anzahl Plätze: $M = 365$, Nach $N = 23$ Elementen bereits grosse Chance, dass Kollision auftritt.
- Allgemein: Wir erwarten Kollision nach ungefähr $\sqrt{\pi M/2}$ Elementen.

Kollisionen

Wir können Kollisionen nicht verhindern.

Beispiele relevanter mathematischer Resultate:

Sammelbilderproblem Gegeben M Sammelbilder, wieviele Bilder muss man ziehen (mit zurücklegen), bevor man jedes einmal gezogen hat?

- Angewandt auf hashing: Wie lange dauert es bis alle Felder besetzt sind?
- Der Erwartungswert wächst mit $\Theta(M \log(M))$

Um $M = 50$ unterschiedliche Sammelbilder zu haben benötigen wir ungefähr $50 \log(50) \approx 200$ Bilder

Experimente

jupyter Untitled (autosaved)

File Edit View Insert Cell Kernel Help

Python [Root] O

CellToolbar

Algorithmen und Datenstrukturen

Interaktive Experimente

In [3]: `%pylab inline`

Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib

In [7]: `plot(linspace(0, 1000), (linspace(0,1000) ** 2))`

Out[7]: [`<matplotlib.lines.Line2D at 0x29d8be022e8>`]

IPython Notebooks: Hashtables.ipynb

Hashtabellen

Hashtabelle: 2 Implementationen

Grundlage ist immer ein Array der Grösse M um N Einträge zu speichern.

Wichtigste Frage: Wie behandle ich Kollisionen?

2 Strategien

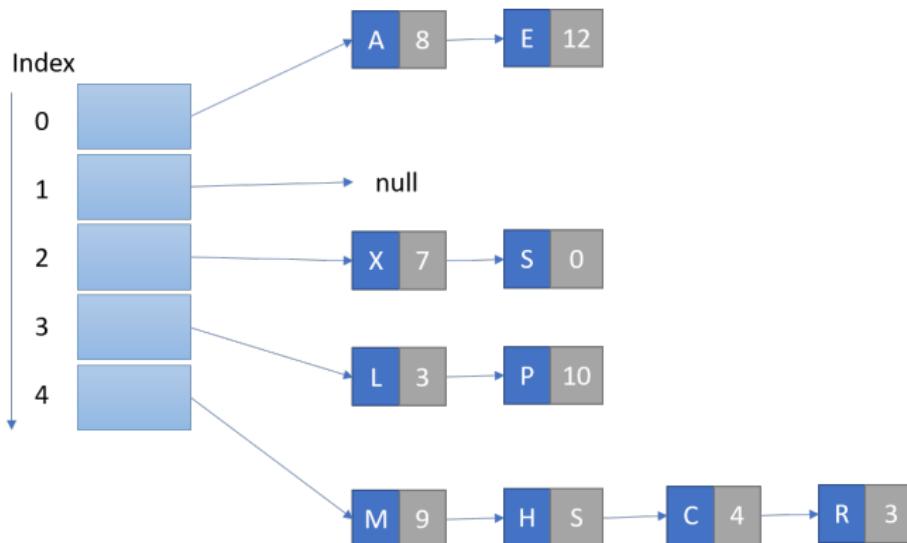
- Verkettung (separate chaining)
 - Jedes Element enthält Verkettete Liste mit allen Schlüssel / Werte Paaren
 - M kann kleiner sein als N
- Lineare Sondierung (linear probing)
 - M wird grösser gewählt als N .
 - Suche nach nächstem freien Platz.

Verkettung

Hash: Schlüssel wird auf Zahl zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: Falls nicht gefunden, am Anfang in Liste einfügen

Suche: Relevante Liste durchsuchen



Komplexität

Theorem

In einer auf Verkettung basierenden Hashtabelle mit M Listen und N Schlüsseln ist die Wahrscheinlichkeit (unter der Gleichverteilungsannahme), dass die Anzahl der Schlüssel in einer Liste bis auf einen kleinen konstanten Faktor bei N/M liegt, extrem nahe an 1.

Komplexität

Theorem

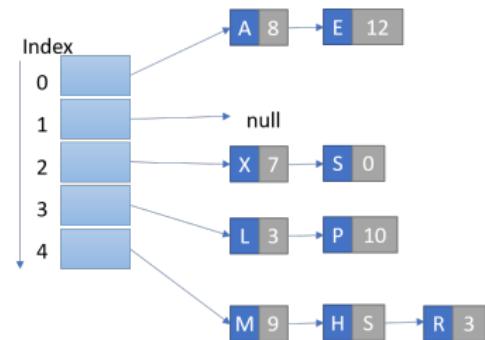
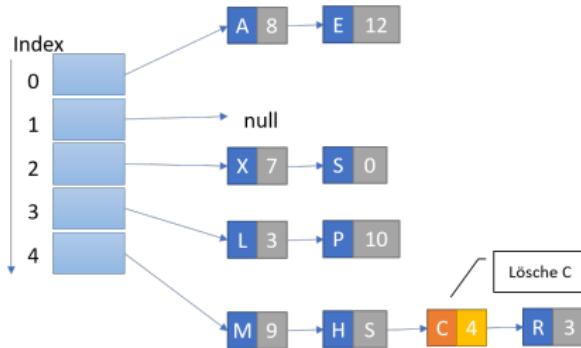
In einer auf Verkettung basierenden Hashtabelle mit M Listen und N Schlüsseln ist die Wahrscheinlichkeit (unter der Gleichverteilungsannahme), dass die Anzahl der Schlüssel in einer Liste bis auf einen kleinen konstanten Faktor bei N/M liegt, extrem nahe an 1.

Theorem

In einer auf Verkettung basierenden Hashtabelle mit M Listen und N Schlüsseln ist die Anzahl der Vergleiche (Gleichheitstests) für Einfügungen und erfolglose Suchen $\sim N/M$.

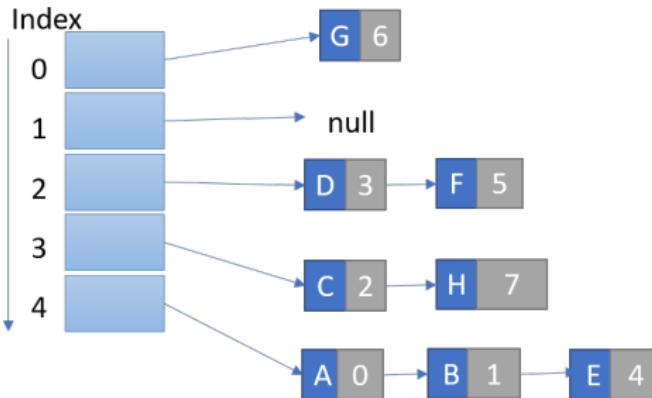
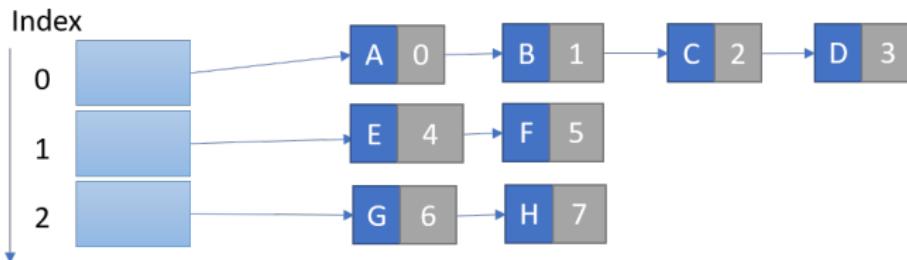
Verkettung: Elemente Löschen

- Einfache Operation: Element aus relevanter Liste löschen.



Verkettung: Größenanpassung

- Ziel: Länge N/M bleibt etwa konstant
- Alle Elemente müssen neu gehashed werden.



Implementation und Beispielanwendung

jupyter Untitled (autosaved)

File Edit View Insert Cell Kernel Help

Python [Root] O

CellToolbar

Algorithmen und Datenstrukturen

Interaktive Experimente

```
In [3]: %pylab inline
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

```
In [7]: plot(linspace(0, 1000), (linspace(0,1000) **2))
Out[7]: [
```

IPython Notebooks: Hashtables.ipynb

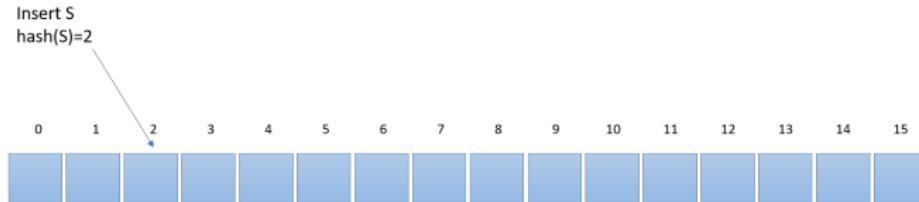
Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

Hash: Schlüssel wird auf Zahl i zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: An Position i einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1, i + 2, \dots$



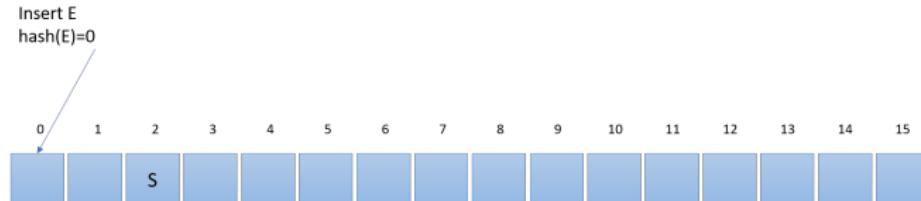
Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

Hash: Schlüssel wird auf Zahl i zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: An Position i einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1, i + 2, \dots$



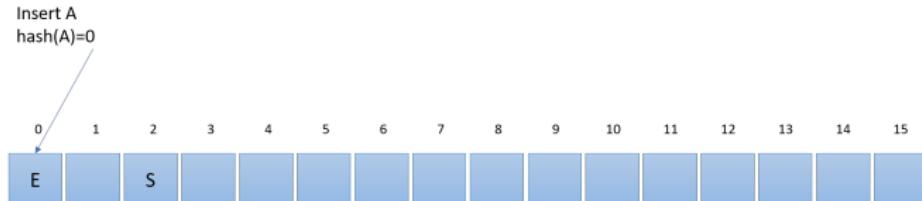
Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

Hash: Schlüssel wird auf Zahl i zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: An Position i einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1, i + 2, \dots$



Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

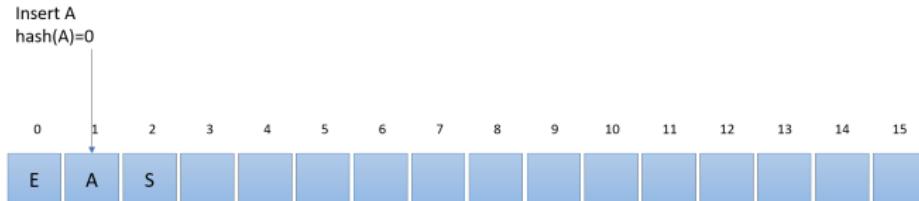
Hash: Schlüssel wird auf Zahl i zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: An Position i einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1, i + 2, \dots$

Suche: Suche an Index i

- Falls nicht leer, aber Eintrag $! =$ gesuchter Schlüssel, suche an Position $i + 1, i + 2$, etc.



Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

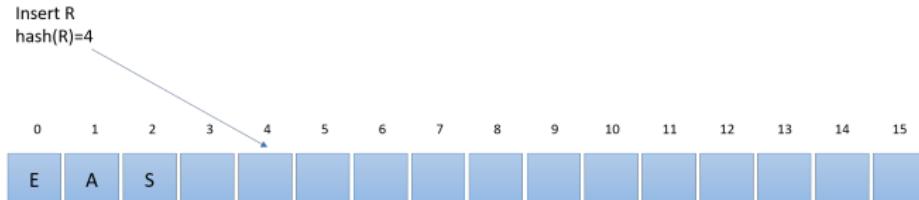
Hash: Schlüssel wird auf Zahl i zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: An Position i einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1, i + 2, \dots$

Suche: Suche an Index i

- Falls nicht leer, aber Eintrag $! =$ gesuchter Schlüssel, suche an Position $i + 1, i + 2$, etc.



Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

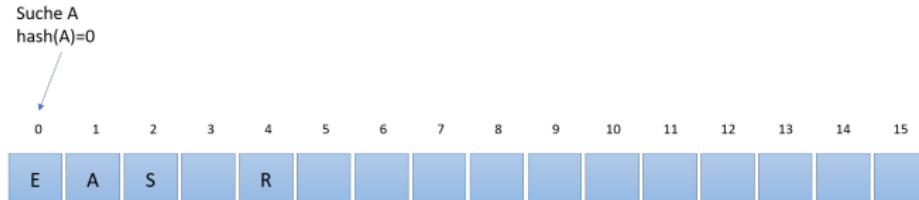
Hash: Schlüssel wird auf Zahl i zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: An Position i einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1, i + 2, \dots$

Suche: Suche an Index i

- Falls nicht leer, aber Eintrag $! =$ gesuchter Schlüssel, suche an Position $i + 1, i + 2$, etc.



Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

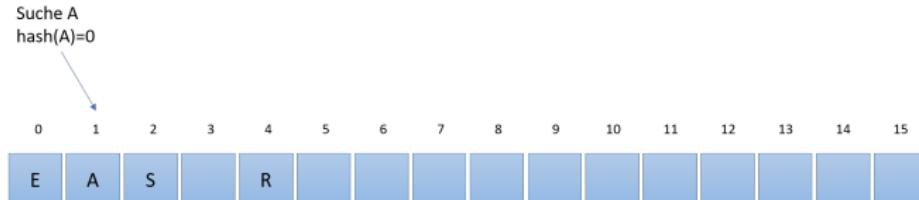
Hash: Schlüssel wird auf Zahl i zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: An Position i einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1, i + 2, \dots$

Suche: Suche an Index i

- Falls nicht leer, aber Eintrag $! =$ gesuchter Schlüssel, suche an Position $i + 1, i + 2$, etc.



Lineare Sondierung: Elemente Löschen

- Wenn erstes Element in Cluster gelöscht wird, müssen Nachfolger gelöscht werden.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Schlüssel	E	A	S		R			X	F	I				Q		

Was ist wenn $\text{hash}(I)=7$?



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Schlüssel	E	A	S		R			X	F	I			Q			

Lineare Sondierung: Größenanpassung

- Ziel: Länge $N/M \leq 1/2$
- Alle Elemente müssen neu gehashed werden.



Implementation und Beispielanwendung

jupyter Untitled (autosaved)

File Edit View Insert Cell Kernel Help

Python [Root] O

CellToolbar

Algorithmen und Datenstrukturen

Interaktive Experimente

```
In [3]: %pylab inline
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

```
In [7]: plot(linspace(0, 1000), (linspace(0,1000) **2))
Out[7]: [matplotlib.lines.Line2D at 0x29d0be022e8]
```

IPython Notebooks: Hashtables.ipynb

Clustering

Beobachtung

Lineares Sondieren führt zu Clusterbildung.

- Bei Kollision wächst ein Cluster, da das Element am Ende eingefügt wird.



Clustering

Beobachtung

Lange Cluster wachsen schneller als kurze.

- Wahrscheinlichkeit in einem grossen Cluster zu landen ist grösser.



Quelle: Abb. 3.60, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Clustering

Beobachtung

Laufzeit der Suche hängt von Länge der Cluster ab.

Theorem

In einer auf linearer Sondierung basierenden Hashtabelle mit einer Liste der Grösse M und $N = \alpha M$ Schlüsseln ist die erforderliche durchschnittliche Anzahl von Sondierungen für erfolgreiches beziehungsweise erfolgloses Suchen

$$\sim \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \quad \text{und} \quad \sim \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \right)$$

Komplexität

Implementation	suchen	Worst-case			Average-case		
		einfügen	löschen	suchen (hit)	einfügen	löschen	
Verkettete Liste	N	N	N	N/2	N	N/2	
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	N	$\log_2(N)$	$N/2$	N	
BST	N	N	N	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	\sqrt{N}	
Rot-Schwarz Bäume	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	
Hashtabellen	N	N	N	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	

Diskussion

Wann sollen wir welche Art von Datenstruktur verwenden?

implementation	guarantee			average case			ordered ops?	key interface
	search	insert	delete	search hit	insert	delete		
sequential search (unordered list)	N	N	N	$\frac{N}{2}$	N	$\frac{N}{2}$		<code>equals()</code>
binary search (ordered array)	$\lg N$	N	N	$\lg N$	$\frac{N}{2}$	$\frac{N}{2}$	✓	<code>compareTo()</code>
BST	N	N	N	$1.39 \lg N$	$1.39 \lg N$	\sqrt{N}	✓	<code>compareTo()</code>
red-black BST	$2 \lg N$	$2 \lg N$	$2 \lg N$	$1.0 \lg N$	$1.0 \lg N$	$1.0 \lg N$	✓	<code>compareTo()</code>
separate chaining	N	N	N	3.5 ✘	3.5 ✘	3.5 ✘		<code>equals()</code> <code>hashCode()</code>
linear probing	N	N	N	3.5 ✘	3.5 ✘	3.5 ✘		<code>equals()</code> <code>hashCode()</code>

Abbildung: Sedgewick & Wayne, Tabelle 3.15