Algorithmen und Datenstrukturen

B1. Arrays und verkettete Listen

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

23. März 2023

B1.1 Übersicht

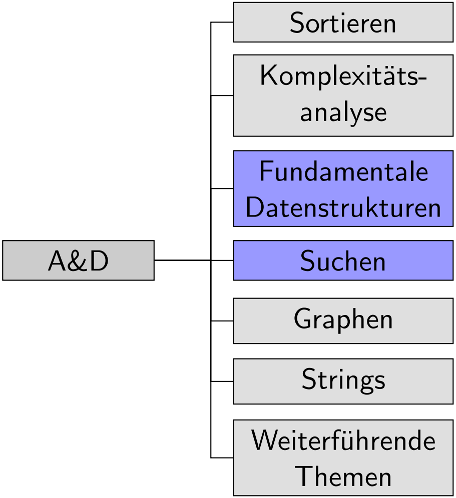
B1.2 Datenstrukturen

B1.3 Arrays

B1.4 Verkettete Listen

B1.1 Übersicht

Übersicht


Sortieren
Komplexitäts-analyse
Fundamentale Datenstrukturen
A&D
Suchen
Graphen
Strings
Weiterführende Themen

Ausblick : Fundamentale Datenstrukturen

- Datenabstraktion (Abstrakte Datentypen)
  - Multimengen, Stapel, (Prioritäts-) Warteschlangen
- Datenstrukturen
  - Arrays, Verkettete Listen, Bäume, Heaps

Höhepunkt: Heapsort

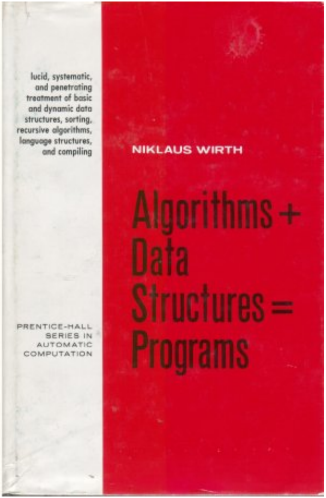
Elegantes Zusammenspiel Algorithmus und Datenstruktur.

- Clevere Datenstruktur - Simpler Algorithmus
- Garantiertes Laufzeitverhalten $O(n \log n)$

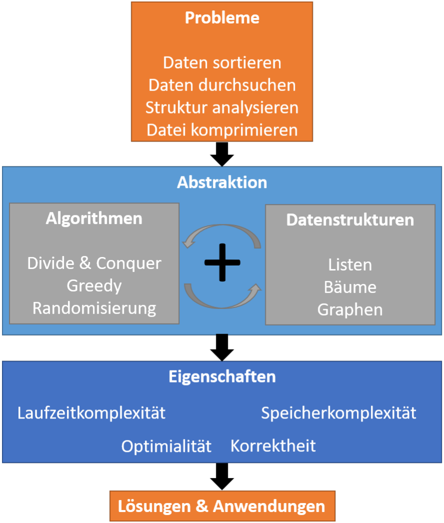
B1.2 Datenstrukturen

Datenstrukturen

- Programmieren ist mehr als Algorithmen schreiben
  - Datenorganisation ist zentral
- Elegante Datenstrukturen führen zu elegantem Code
- Programmierer
  - braucht Katalog von Datenstrukturen
  - muss Eigenschaften kennen



Übersicht


Probleme
Daten sortieren
Daten durchsuchen
Struktur analysieren
Datei komprimieren
Abstraktion
Algorithmen
Divide & Conquer
Greedy
Randomisierung
+
Datenstrukturen
Listen
Bäume
Graphen
Eigenschaften
Laufzeitkomplexität
Speicherkomplexität
Optimialität
Korrektheit
Lösungen & Anwendungen

Datenstrukturen

> Bad programmers worry about the code. Good programmers worry about data structures and their relationships.
>
> Linus Torwalds

Datenstrukturen

> Show me your algorithm and conceal your datastructures, and I shall continue to be mystified. Show me your datastructures, and I won't usually need your algorithm; it will be obvious.
>
> Fred Brooks (paraphrased)

B1.3 Arrays

Die Datenstruktur Array (Feld)

- Eine der grundlegenden Datenstrukturen, die sich in jeder Programmiersprache findet.
- Beschreibt eine Kollektion von fixer Grösse.

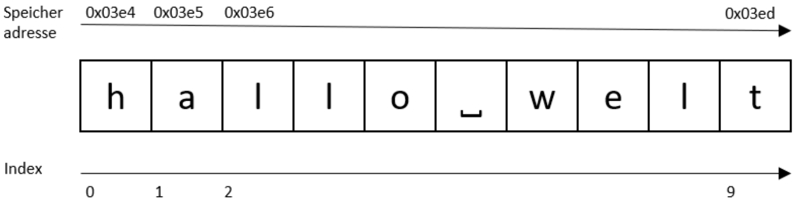
In Java:

```
Byte[] ia = new Byte[100];
String[] sa = new String[100];
```

Die Datenstruktur Array (Feld)

Array

Sequenz von Elementen die in gleichmässigen Abständen im Speicher angeordent sind.



Laufzeit grundlegender Operationen

- Was ist die Laufzeitkomplexität von folgenden Operationen (als Funktion der Arraygrösse n)?
  - `get(i)` Element an beliebiger Stelle i lesen
  - `set(i)` - Element an beliebiger Stelle i schreiben
  - `length()` - Länge von Array bestimmen.
  - `find(x)` - Element x finden und Index zurückliefern.
- Was ist die Speicherkomplexität?

Beobachtung

Komplexität direkte Konsequenz aus der Datenrepräsentation

Dynamische Arrays

Fixe Grösse ist für viele Anwendungen einschränkend

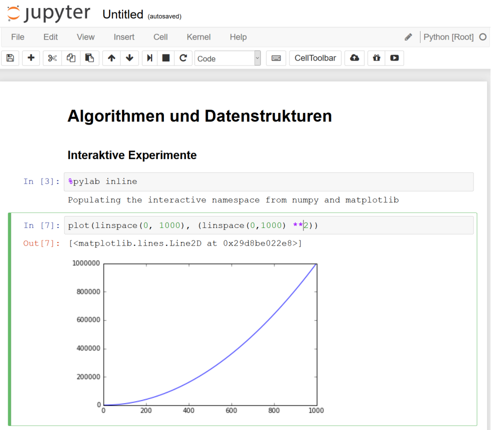
- Brauchen Arrays, die dynamisch wachsen können.
- Laufzeit Eigenschaften bestehender Methoden sollen gleich bleiben.

Zusätzliche Funktionen

- `append(x)` (manchmal push) - Element x ans Ende anfügen
- `insert(i, x)` - Element x an Stelle i einfügen
- `pop()` - letztes Element entfernen
- `remove(i)` - Element an position i löschen

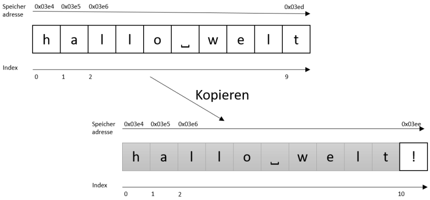
Was ist die Laufzeitkomplexität dieser Funktionen?

Experiment in Python



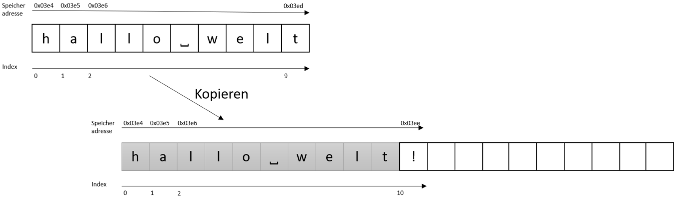
Arrays vergrössern / verkleinern : Naive Methode

- append (und insert) müssen Array vergrössern.
- pop muss Array verkleinern
- Naive Methode: Jeweils um 1 grösses/kleineres Array anlegen
  - Element in neues Array kopieren



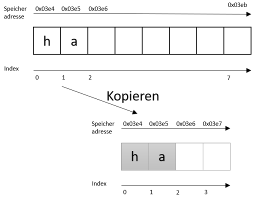
Arrays vergrössern : Schlauere Methode

- `append` (und `insert`) müssen Array vergrössern.
- Grösseres Array (von $2n$ Elementen) anlegen.
  - Array muss nur bei jeden n-ten Aufruf von `append` kopiert werden.



Arrays verkleinern : Schlauere Methode

- pop muss Array verkleinern
- Kleineres Array anlegen nur wenn Array zu $n/4$ gefüllt.
- In neues Array der Grösse $n/2$ kopieren.
  - Array muss nur bei jeden $n/4$-ten Aufruf von pop kopiert werden.



Implementation: Arrays vergrössern / verkleinern (1)

- Implementation der append und pop Methode.

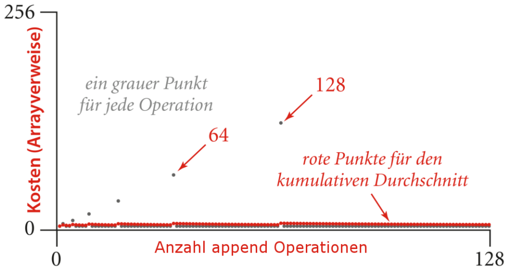
```python
class Array:
  data = [None] # list simulates block of memory
  size = 0

  def append(self, elem):
      if len(self.data) == self.size:
          self.resize(len(self.data) * 2)
      self.data[self.size] = elem
      self.size += 1

  def pop(self, elem):
    self.size -= 1
    item = self.data[self.size];
    if self.size > 0
       and self.size == len(self.data) / 4:
      self.resize(int(len(self.data) / 2));

    return item;
```

Implementation: Arrays vergrössern /verkleinern (2)

```python
class Array:
  data = [None] # list simulates block of memory
  size = 0

  def append(self, elem):
    ...

  def pop(self, elem):
    ...

  def resize(self, numElements ):
    newArray = [None] * numElements
    for i in range(0, self.size):
        newArray[i] = self.data[i]
    self.data = newArray
```

Theoretische Analyse der append Operation

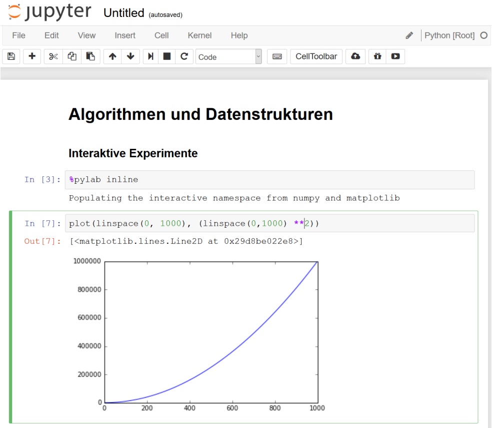
Die append Operation hat (amortisierte) Laufzeit $O(1)$



Quelle: Abbildung 1.28 - Algorithms, Sedgewick & Wayne

- Amortisierte Analyse: Mittlere Laufzeit pro Operation wird über Seqenz von N Operationen (im worst case) ermittelt.

Amortisierte Analyse



Jupyter-Notebook: arrays.ipynb

Analyse der append Operation: Beweisskizze

Annahmen:

- N ist Zweierpotenz.
- Wir starten mit Array der Grösse 1

Betrachte N aufeinanderfolgende Aufrufe von `append`. Wir haben folgende Anzahl Arrayzugriffe

$$N + 4 + 8 + 16 + \ldots + N + 2N$$

Wir nutzen, dass $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$
$N + 4 + 8 + 16 + \ldots + N + 2N \leq 3N + \sum_{i=0}^{\log_2 N} 2^i =$
$3N + 2^{(\log_2 N)+1} - 1 = 3N + 2 \cdot 2^{\log_2 N} - 1 \leq 5N$

Beobachtung: Kosten pro Aufruf von `append` sind konstant (< 5N Operationen für N Aufrufe)

B1.4 Verkettete Listen

Informatiker des Tages

Herbert Simon (Ökonom)

- Nobelpreisträger und Gewinner des Turing Awards
- Pionier in künstlicher Intelligenz
- „Erfinder "der verketteten Liste (im Rahmen der IPL Sprache).

Newell, Allen, and Fred M. Tonge. An introduction to information processing language V. Communications of the ACM (1960).

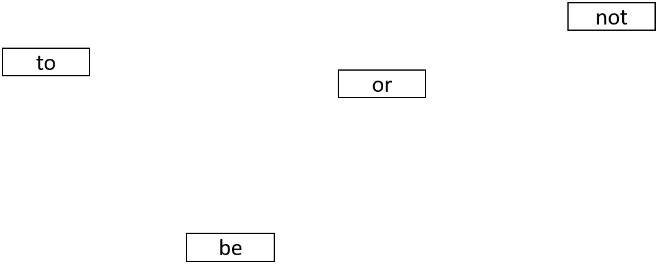
Motivation

- Arrays sind nicht flexibel genug
- Brauchen immer grossen, kontinuierlichen Block an Speicher
- Einfügen von Elementen an beliebiger Position ist teuer

Lösung muss uns erlauben Elemente im Speicher zu verteilen.

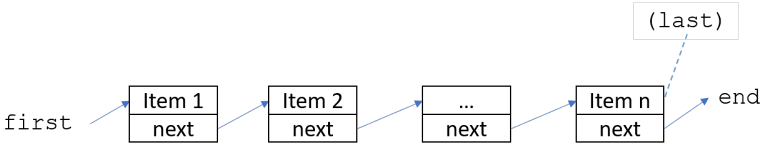
Frage?

- Wie kann man Elemente ordnen die verteilt im Speicher sind?



Verkettete Listen

- Wichtige, flexible Datenstruktur
- Jeder Knoten speichert sein Datum, sowie eine Referenz (Zeiger) auf Nachfolger
- Ende muss speziell gekennzeichnet werden (häufig null/None).
- ... oder wir brauchen Referenz auf letztes Element



Quiz: Komplexität Array / Verkettete Liste

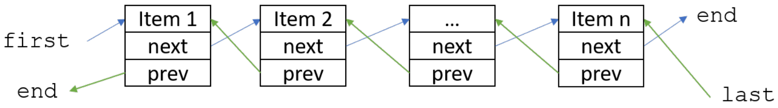
Operation	Array	Verkettete Liste
Zugriff auf beliebiges Element		
Einfügen, Löschen am Anfang		
Einfügen am Ende		
Löschen am Ende		
Einfügen, Löschen in Mitte		
Verschwendeter Speicher		

Take-home Message

- Verschiedene Datenstrukturen machen verschiedene Trade-offs

Doppelt verkettete Liste

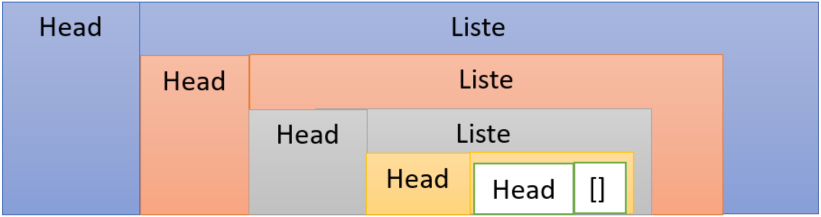
- Referenz nicht nur auf Nachfolger, sondern auch vorhergehendes Element
- Macht Entfernen vom Ende günstig.



Rekursive Definition

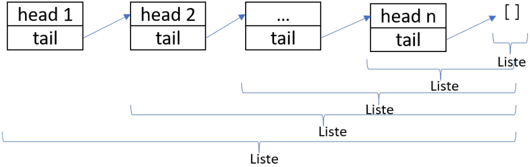
Eine Liste L ist

- die leere Liste
- oder ein Element H (Head) gefolgt von einer Liste: H, L



Verkettete Listen: Datenstruktur (rekursiv)

```
class List[Item]:
  head : Item
  tail : List[Item]
  List(head : Item, tail : List[Item]) # Konstruktor

emptyList = List(None, None)
```



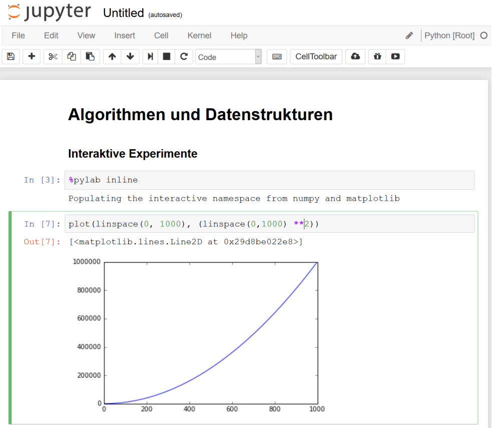
Verkettete Listen: Datenstruktur (rekursiv)

```
class List[Item]:
  head : Item
  tail : List[Item]
  List(head : Item, tail : List[Item]) # Konstruktor

emptyList = List(None, None)
```

Vergleiche:

```
class Node[Item]:
  item : Item
  next : Node
  Node(head : Item, tail : Node[Item])  # Konstruktor
```

Implementation in Python



Jupyter-Notebook: linked-lists.ipynb