Algorithmen und Datenstrukturen

A11. Sortieren: Untere Schranke

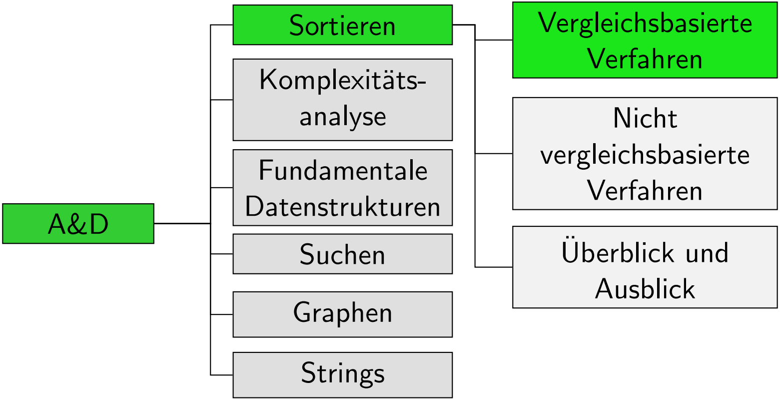
Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

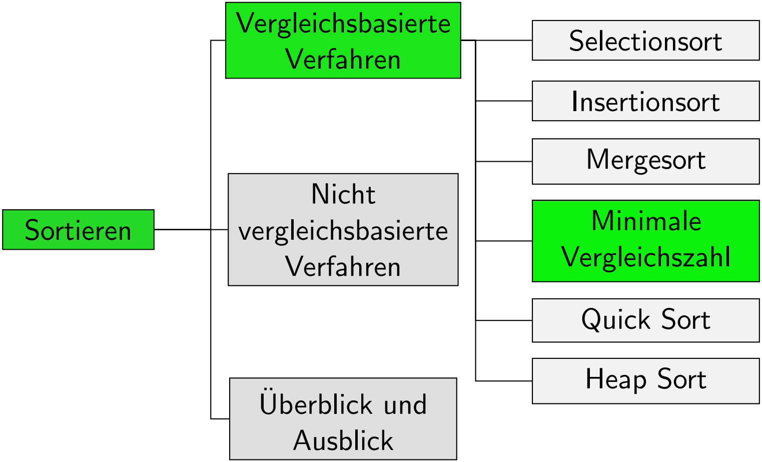
16. März 2023

Untere Schranke an erforderliche Vergleichsoperationen

Inhalt dieser Veranstaltung



Sortierverfahren



Fragestellung

- Mergesort hatte bisher mit $O(n \log_2 n)$ die beste (Worstcase-)Laufzeit.
- Geht es noch besser?
- Wir zeigen: Nicht mit vergleichsbasierten Verfahren!

Vorgehen

- Schwierigkeit: Wir können nicht einen bestimmten Algorithmus analysieren, sondern müssen eine Aussage über alle möglichen Verfahren treffen.

Vorgehen

- Schwierigkeit: Wir können nicht einen bestimmten Algorithmus analysieren, sondern müssen eine Aussage über alle möglichen Verfahren treffen.
- Vergleichsbasierte Verfahren können die Eingabe nur anhand von Schlüsselvergleichen analysieren.

Vorgehen

- Schwierigkeit: Wir können nicht einen bestimmten Algorithmus analysieren, sondern müssen eine Aussage über alle möglichen Verfahren treffen.
- Vergleichsbasierte Verfahren können die Eingabe nur anhand von Schlüsselvergleichen analysieren.
- Sie müssen jede Eingabe korrekt sortieren.

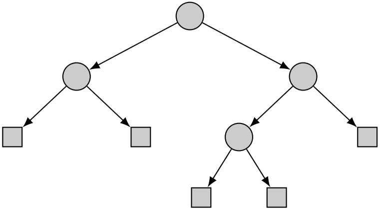
Vorgehen

- Schwierigkeit: Wir können nicht einen bestimmten Algorithmus analysieren, sondern müssen eine Aussage über alle möglichen Verfahren treffen.
- Vergleichsbasierte Verfahren können die Eingabe nur anhand von Schlüsselvergleichen analysieren.
- Sie müssen jede Eingabe korrekt sortieren.
- Daraus können wir eine untere Schranke an die Anzahl der Schlüsselvergleiche im worst-case ableiten.

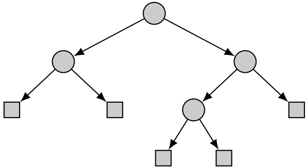
Abstraktes Verhalten als Baum

Betrachte beliebigen vergleichsbasierten Sortieralgorithmus A.

- Verhalten hängt nur vom Ergebnis der Schlüsselvergleiche ab.
- Bei jedem Schlüsselvergleich gibt es zwei Möglichkeiten, wie der Algorithmus weiter macht.
- Wir können das graphisch als Baum darstellen.

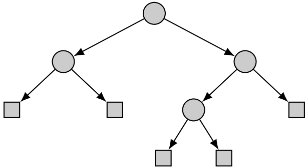


Crashkurs Binärbäume



- Binärbaum: jeder Knoten hat höchstens zwei Nachfolger
- Knoten ohne Nachfolger heissen Blätter (Bild: eckige Knoten).
- Der Knoten ganz oben ist die Wurzel.
- Die Tiefe eines Blattes entspricht der
  Anzahl von Kanten von der Wurzel zu dem Blatt.

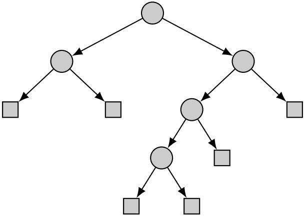
Crashkurs Binärbäume



- Binärbaum: jeder Knoten hat höchstens zwei Nachfolger
- Knoten ohne Nachfolger heissen Blätter (Bild: eckige Knoten).
- Der Knoten ganz oben ist die Wurzel.
- Die Tiefe eines Blattes entspricht der Anzahl von Kanten von der Wurzel zu dem Blatt.

Die maximale Tiefe eines Blattes in einem Binärbaum mit k Blättern ist mindestens $\log_2 k$.

Aufgabe (Slido)



Was ist die maximale Tiefe
eines Blattes in diesem Baum?

Ergebnis als Permutation

Was muss der Algorithmus können?

- Annahme: alle Elemente unterschiedlich
- Muss alle Eingaben der Grösse n korrekt sortieren.

Ergebnis als Permutation

Was muss der Algorithmus können?

- Annahme: alle Elemente unterschiedlich
- Muss alle Eingaben der Grösse n korrekt sortieren.
- Wir können alle Algorithmen so anpassen, dass sie verfolgen, von welcher Position zu welcher Position die Elemente bewegt werden müssen.
- Das Ergebnis ist dann nicht das sortierte Array, sondern die entsprechende Permutation.
  Beispiel: pos0 $\mapsto$ pos2, pos1 $\mapsto$ pos1, pos2 $\mapsto$ pos0

Ergebnis als Permutation

Was muss der Algorithmus können?

- Annahme: alle Elemente unterschiedlich
- Muss alle Eingaben der Grösse n korrekt sortieren.
- Wir können alle Algorithmen so anpassen, dass sie verfolgen, von welcher Position zu welcher Position die Elemente bewegt werden müssen.
- Das Ergebnis ist dann nicht das sortierte Array, sondern die entsprechende Permutation.
  Beispiel: pos0 $\mapsto$ pos2, pos1 $\mapsto$ pos1, pos2 $\mapsto$ pos0
- Da alle möglichen Eingaben der Grösse n korrekt gelösst werden müssen, muss der Algorithmus alle $n!$ möglichen Permutationen erzeugen können.

Untere Schranke

- Jedes Blatt in der Baumdarstellung entspricht einer Permutation.
- Bei Eingabegrösse n muss der Baum also mindestens $n!$ Blätter haben.
- Die maximale Tiefe des entsprechenden Baumes ist demnach $\geq \log_2(n!)$.
- Es gibt also eine Eingabe der Grösse n mit $\geq \log_2(n!)$ Schlüsselvergleichen.

Untere Schranke: Abschätzung

Abschätzung von $\log_2(n!)$

- Es gilt $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$
  $4! = 1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{4}_{\geq 2} \geq 2^2$

Untere Schranke: Abschätzung

Abschätzung von $\log_2(n!)$

- Es gilt $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$
  $4! = 1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{4}_{\geq 2} \geq 2^2$
- $\log_2(n!) \geq log_2((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) = \frac{n}{2} log_2(\frac{n}{2})$
  $= \frac{n}{2}(\log_2 n + \log_2 \frac{1}{2}) = \frac{n}{2}(\log_2 n - \log_2 2)$
  $= \frac{n}{2}(\log_2 n - 1)$

Untere Schranke: Abschätzung

Abschätzung von $\log_2(n!)$

- Es gilt $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$
  $4! = 1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{4}_{\geq 2} \geq 2^2$
- $$\begin{aligned} \log_2(n!) &\geq log_2((\tfrac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) = \tfrac{n}{2} log_2(\tfrac{n}{2}) \\ &= \tfrac{n}{2}(\log_2 n + \log_2 \tfrac{1}{2}) = \tfrac{n}{2}(\log_2 n - \log_2 2) \\ &= \tfrac{n}{2}(\log_2 n - 1) \end{aligned}$$

Theorem

Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ viele Schlüsselvergleiche. Damit liegt auch die Laufzeit in $\Omega(n \log n)$.

Mergesort ist asymptotisch optimal.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren hat mindestens leicht überlineare Laufzeit.