

Algorithmen und Datenstrukturen

A11. Sortieren: Untere Schranke

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

16. März 2023

Algorithmen und Datenstrukturen

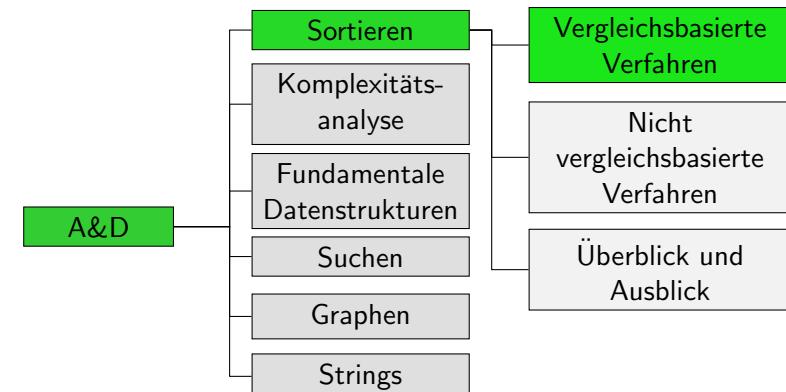
16. März 2023 — A11. Sortieren: Untere Schranke

A11.1 Untere Schranke an erforderliche Vergleichsoperationen

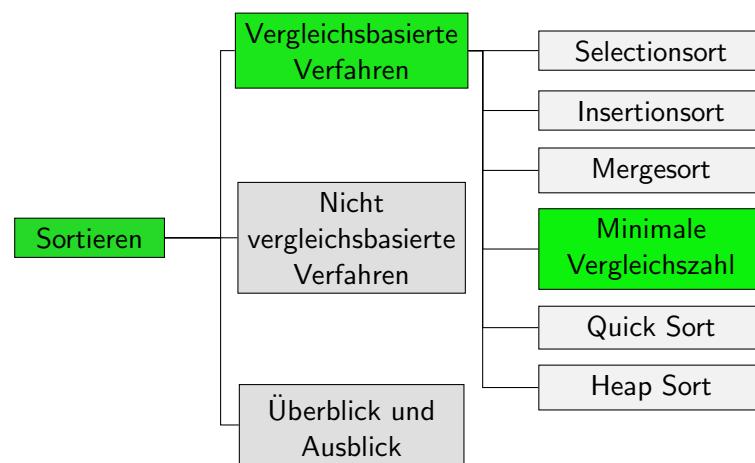
A11.2 Zusammenfassung

A11.1 Untere Schranke an erforderliche Vergleichsoperationen

Inhalt dieser Veranstaltung



Sortierverfahren



Fragestellung

- Mergesort hatte bisher mit $O(n \log_2 n)$ die beste (Worstcase-)Laufzeit.
- Geht es noch besser?
- **Wir zeigen:** Nicht mit vergleichsbasierten Verfahren!

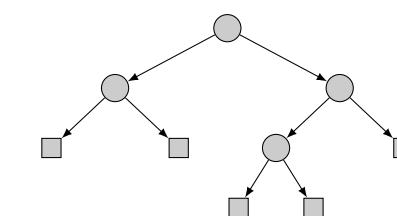
Vorgehen

- **Schwierigkeit:** Wir können nicht einen bestimmten Algorithmus analysieren, sondern müssen eine Aussage über **alle möglichen Verfahren** treffen.
- Vergleichsbasierte Verfahren können die Eingabe nur anhand von Schlüsselvergleichen analysieren.
- Sie müssen jede Eingabe korrekt sortieren.
- Daraus können wir eine untere Schranke an die Anzahl der Schlüsselvergleiche im worst-case ableiten.

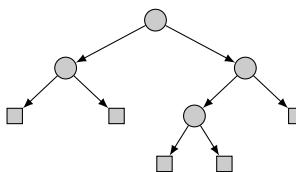
Abstraktes Verhalten als Baum

Betrachte beliebigen vergleichsbasierten Sortieralgorithmus A.

- Verhalten hängt nur vom Ergebnis der Schlüsselvergleiche ab.
- Bei jedem Schlüsselvergleich gibt es zwei Möglichkeiten, wie der Algorithmus weiter macht.
- Wir können das graphisch als Baum darstellen.



Crashkurs Binäräume



- ▶ **Binärbaum:** jeder Knoten hat höchstens zwei Nachfolger
- ▶ Knoten ohne Nachfolger heißen **Blätter** (Bild: eckige Knoten).
- ▶ Der Knoten ganz oben ist die **Wurzel**.
- ▶ Die **Tiefe** eines Blattes entspricht der Anzahl von Kanten von der Wurzel zu dem Blatt.

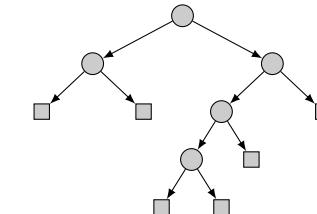
Die maximale Tiefe eines Blattes in einem Binärbaum mit k Blättern ist mindestens $\log_2 k$.

Ergebnis als Permutation

Was muss der Algorithmus können?

- ▶ **Annahme:** alle Elemente unterschiedlich
- ▶ Muss **alle Eingaben** der Grösse n **korrekt** sortieren.
- ▶ Wir können alle Algorithmen so anpassen, dass sie verfolgen, von welcher Position zu welcher Position die Elemente bewegt werden müssen.
- ▶ Das Ergebnis ist dann nicht das sortierte Array, sondern die entsprechende **Permutation**.
Beispiel: $\text{pos0} \mapsto \text{pos2}$, $\text{pos1} \mapsto \text{pos1}$, $\text{pos2} \mapsto \text{pos0}$
- ▶ Da alle möglichen Eingaben der Grösse n korrekt gelösst werden müssen, muss der Algorithmus **alle $n!$ möglichen Permutationen** erzeugen können.

Aufgabe (Slido)



Was ist die maximale Tiefe eines Blattes in diesem Baum?



Untere Schranke

- ▶ Jedes Blatt in der Baumdarstellung entspricht einer Permutation.
- ▶ Bei Eingabegrösse n muss der Baum also mindestens $n!$ Blätter haben.
- ▶ Die maximale Tiefe des entsprechenden Baumes ist demnach $\geq \log_2(n!)$.
- ▶ Es gibt also eine Eingabe der Grösse n mit $\geq \log_2(n!)$ **Schlüsselvergleichen**.

Untere Schranke: Abschätzung

Abschätzung von $\log_2(n!)$

- ▶ Es gilt $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \geq 2^2$$

$$\geq 2 \quad \geq 2$$
- ▶ $\log_2(n!) \geq \log_2\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2} \log_2\left(\frac{n}{2}\right)$

$$= \frac{n}{2}(\log_2 n + \log_2 \frac{1}{2}) = \frac{n}{2}(\log_2 n - \log_2 2)$$

$$= \frac{n}{2}(\log_2 n - 1)$$

Theorem

Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ viele Schlüsselvergleiche. Damit liegt auch die Laufzeit in $\Omega(n \log n)$.

Mergesort ist asymptotisch optimal.

A11.2 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren hat mindestens leicht überlineare Laufzeit.