Algorithmen und Datenstrukturen

A11. Sortieren: Untere Schranke

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

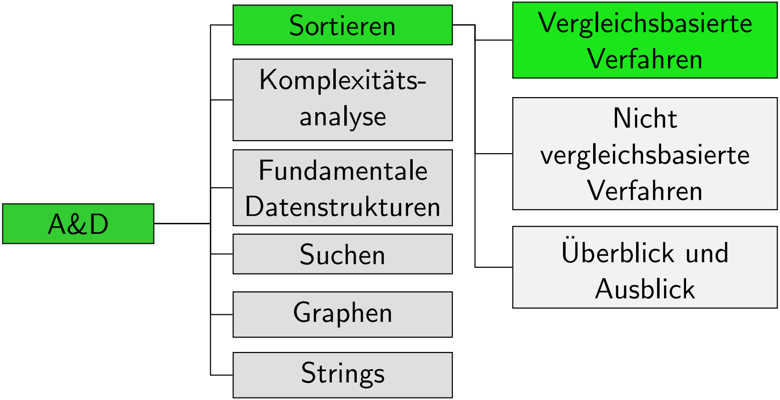
16. März 2023

A11.1 Untere Schranke an erforderliche Vergleichsoperationen

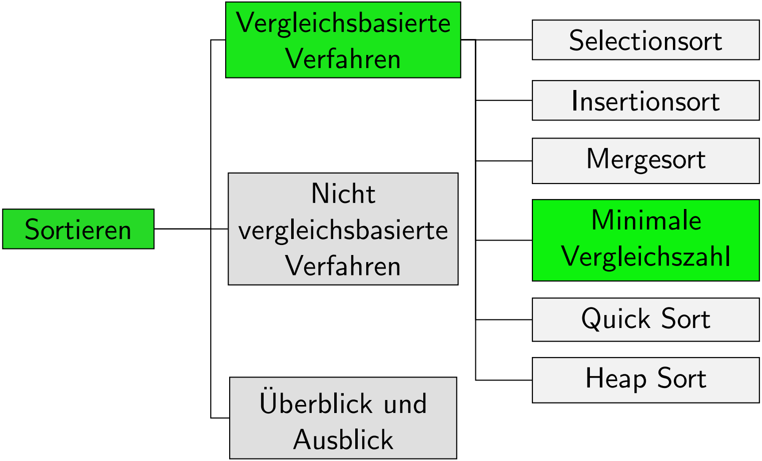
A11.2 Zusammenfassung

A11.1 Untere Schranke an erforderliche Vergleichsoperationen

Inhalt dieser Veranstaltung



Sortierverfahren



Fragestellung

- Mergesort hatte bisher mit $O(n \log_2 n)$ die beste (Worstcase-)Laufzeit.
- Geht es noch besser?
- Wir zeigen: Nicht mit vergleichsbasierten Verfahren!

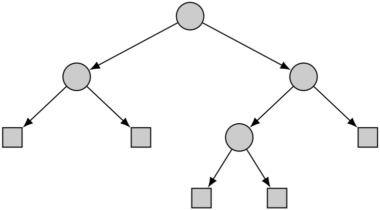
Vorgehen

- Schwierigkeit: Wir können nicht einen bestimmten Algorithmus analysieren, sondern müssen eine Aussage über alle möglichen Verfahren treffen.
- Vergleichsbasierte Verfahren können die Eingabe nur anhand von Schlüsselvergleichen analysieren.
- Sie müssen jede Eingabe korrekt sortieren.
- Daraus können wir eine untere Schranke an die Anzahl der Schlüsselvergleiche im worst-case ableiten.

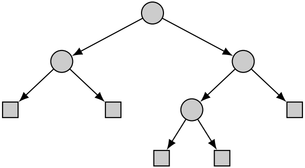
Abstraktes Verhalten als Baum

Betrachte beliebigen vergleichsbasierten Sortieralgorithmus A.

- Verhalten hängt nur vom Ergebnis der Schlüsselvergleiche ab.
- Bei jedem Schlüsselvergleich gibt es zwei Möglichkeiten, wie der Algorithmus weiter macht.
- Wir können das graphisch als Baum darstellen.



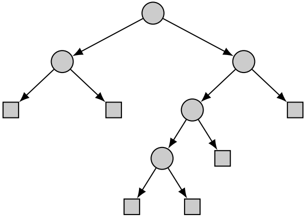
Crashkurs Binärbäume



- Binärbaum: jeder Knoten hat höchstens zwei Nachfolger
- Knoten ohne Nachfolger heissen Blätter (Bild: eckige Knoten).
- Der Knoten ganz oben ist die Wurzel.
- Die Tiefe eines Blattes entspricht der Anzahl von Kanten von der Wurzel zu dem Blatt.

Die maximale Tiefe eines Blattes in einem Binärbaum mit k Blättern ist mindestens $\log_2 k$.

Aufgabe (Slido)



Was ist die maximale Tiefe
eines Blattes in diesem Baum?

Ergebnis als Permutation

Was muss der Algorithmus können?

- Annahme: alle Elemente unterschiedlich
- Muss alle Eingaben der Grösse n korrekt sortieren.
- Wir können alle Algorithmen so anpassen, dass sie verfolgen, von welcher Position zu welcher Position die Elemente bewegt werden müssen.
- Das Ergebnis ist dann nicht das sortierte Array, sondern die entsprechende Permutation.
  Beispiel: pos0 $\mapsto$ pos2, pos1 $\mapsto$ pos1, pos2 $\mapsto$ pos0
- Da alle möglichen Eingaben der Grösse n korrekt gelösst werden müssen, muss der Algorithmus alle n! möglichen Permutationen erzeugen können.

Untere Schranke

- Jedes Blatt in der Baumdarstellung entspricht einer Permutation.
- Bei Eingabegrösse n muss der Baum also mindestens $n!$ Blätter haben.
- Die maximale Tiefe des entsprechenden Baumes ist demnach $\geq \log_2(n!)$.
- Es gibt also eine Eingabe der Grösse n mit $\geq \log_2(n!)$ Schlüsselvergleichen.

Untere Schranke: Abschätzung

Abschätzung von $\log_2(n!)$

- Es gilt $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$
  $4! = 1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{4}_{\geq 2} \geq 2^2$
- $\log_2(n!) \geq log_2((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) = \frac{n}{2} log_2(\frac{n}{2})$
  $= \frac{n}{2}(\log_2 n + \log_2 \frac{1}{2}) = \frac{n}{2}(\log_2 n - \log_2 2)$
  $= \frac{n}{2}(\log_2 n - 1)$

Theorem

Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ viele Schlüsselvergleiche. Damit liegt auch die Laufzeit in $\Omega(n \log n)$.

Mergesort ist asymptotisch optimal.

A11.2 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren hat mindestens leicht überlineare Laufzeit.