Algorithmen und Datenstrukturen

A12. Sortieren: Quicksort (& Heapsort)

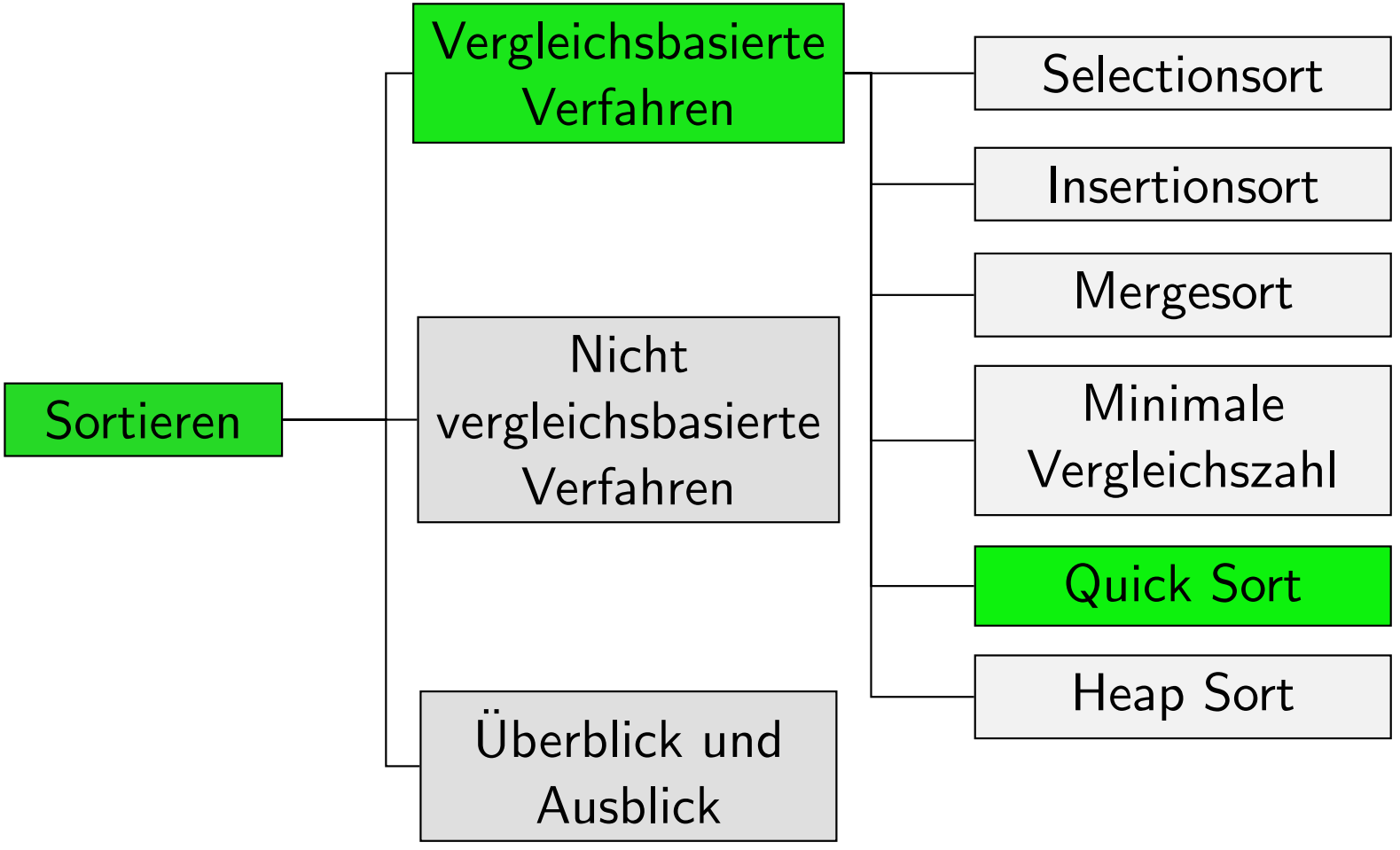
Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

24. März 2022

Quicksort

Sortierverfahren



Quicksort: Idee

- Wie Merge-Sort ein Divide-and-Conquer-Verfahren
- Die Sequenz wird nicht wie bei Mergesort nach Positionen aufgeteilt, sondern nach Werten.
- Hierfür wird ein Element P gewählt (das sogenannte Pivotelement).
- Dann wird so umsortiert, dass P an die endgültige Position kommt, vor P nur Elemente $\leq P$ stehen, und hinten nur Elemente $\geq P$.

- Macht man das rekursiv für den vorderen und den hinteren Teil, ist die Sequenz am Ende sortiert.

Quicksort: Algorithmus

```
1  def sort(array):
2      sort_aux(array, 0, len(array)-1)
3
4  def sort_aux(array, lo, hi):
5      if hi <= lo:
6          return
7      choose_pivot_and_swap_it_to_lo(array, lo, hi)
8      pivot_pos = partition(array, lo, hi)
9      sort_aux(array, lo, pivot_pos - 1)
10     sort_aux(array, pivot_pos + 1, hi)
```

Wie wählt man das Pivot-Element?

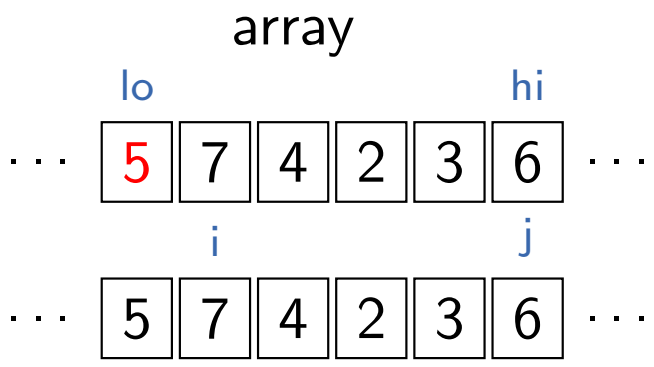
Für die Korrektheit des Verfahrens ist das egal. (Warum?)

Wir können zum Bsp. folgende Strategien wählen:

- Naiv: Nimm immer erstes Element
- Median of Three: Verwende Median aus erstem, mittlerem und letztem Element
- Randomisiert: Wähle zufällig ein Element aus

Gute Pivot-Elemente teilen Sequenz in etwa gleich grosse Bereiche.

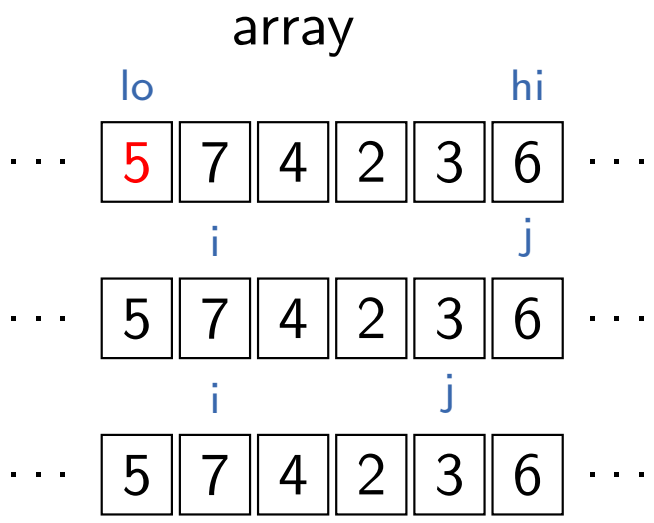
Wie macht man die Umsortierung?



Pivot ist an Pos lo.

Initialisiere $i = \text{lo} + 1, j = \text{hi}$

Wie macht man die Umsortierung?



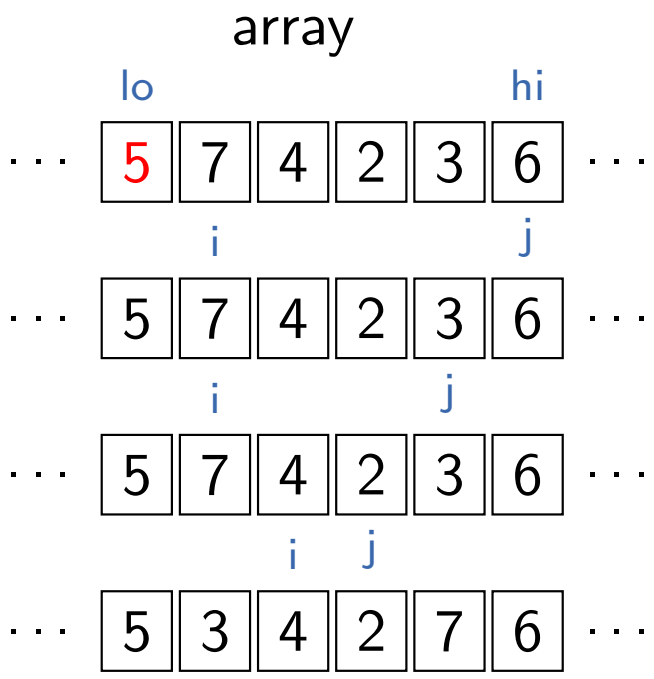
Pivot ist an Pos lo.

Initialisiere $i = \text{lo} + 1, j = \text{hi}$

i nach rechts bis zu Element $\geq$ Pivot,

j nach links bis Element $\leq$ Pivot

Wie macht man die Umsortierung?



Pivot ist an Pos lo.

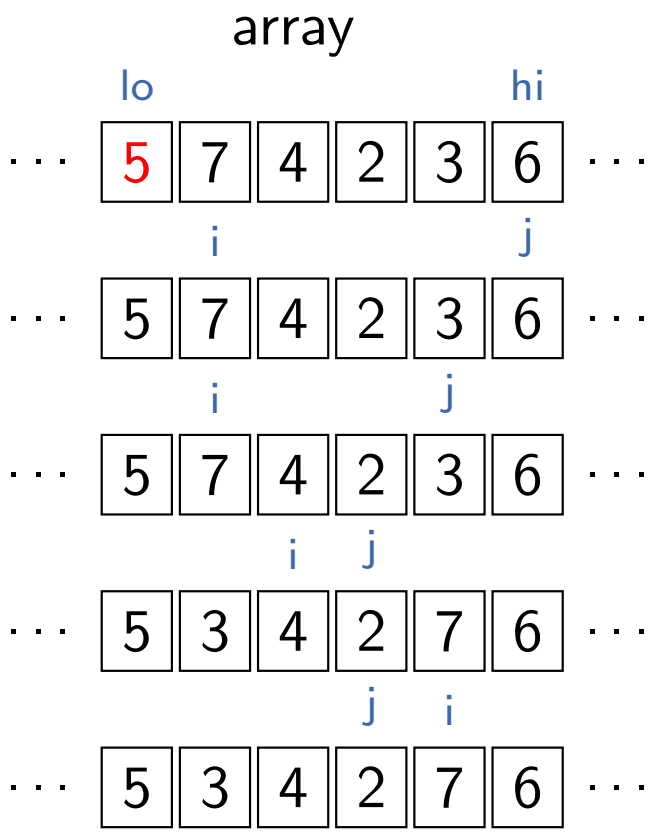
Initialisiere $i = \text{lo} + 1, j = \text{hi}$

i nach rechts bis zu Element $\geq$ Pivot,

j nach links bis Element $\leq$ Pivot

Falls $i < j$: Elemente tauschen, $i{+}{+}$, $j{-}{-}$

Wie macht man die Umsortierung?



Pivot ist an Pos lo.

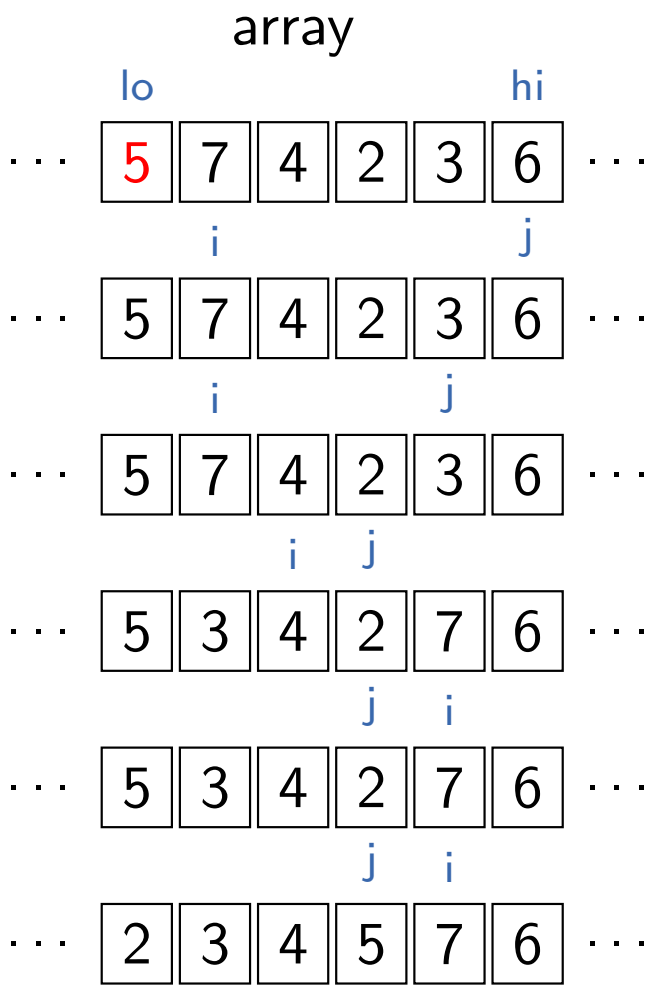
Initialisiere $i = \text{lo} + 1, j = \text{hi}$

i nach rechts bis zu Element $\geq$ Pivot,
j nach links bis Element $\leq$ Pivot

Falls $i < j$: Elemente tauschen, $i{+}{+}$, $j{-}{-}$

i nach rechts bis zu Element $\geq$ Pivot,
j nach links bis Element $\leq$ Pivot

Wie macht man die Umsortierung?



Pivot ist an Pos lo.

Initialisiere $i = \text{lo} + 1, j = \text{hi}$

i nach rechts bis zu Element $\geq$ Pivot,
j nach links bis Element $\leq$ Pivot

Falls $i < j$: Elemente tauschen, $i{+}{+}$, $j{-}{-}$

i nach rechts bis zu Element $\geq$ Pivot,
j nach links bis Element $\leq$ Pivot

$i \geq j$: noch Pivot an Pos j tauschen

Fertig!

Quicksort: Partitionierung

```
1  def partition(array, lo, hi):
2      pivot = array[lo]
3      i = lo + 1
4      j = hi
5      while (True):
6          while i < hi and array[i] < pivot:
7              i += 1
8          while array[j] > pivot:
9              j -= 1
10         if i >= j:
11             break
12
13         array[i], array[j] = array[j], array[i]
14         i, j = i + 1, j - 1
15     array[lo], array[j] = array[j], array[lo]
16     return j
```

Aufgabe

Wie sieht das Array [6, 5, 7, 8, 3] nach einem Aufruf von `partition` für den gesamten Bereich (von Position 0 bis 4) aus?

Quicksort: Laufzeit I

Best case: Pivot-Element teilt in gleich grosse Bereiche

- $O(\log_2 n)$ rekursive Aufrufe
- jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung
- auf einer Rekursionsebene insgesamt $O(n)$ Vergleiche in Partitionierung

$\rightarrow$ $O(n \log n)$

Quicksort: Laufzeit I

Best case: Pivot-Element teilt in gleich grosse Bereiche

- $O(\log_2 n)$ rekursive Aufrufe
- jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung
- auf einer Rekursionsebene insgesamt $O(n)$ Vergleiche in Partitionierung

$\rightarrow$ $O(n \log n)$

Worst case: Pivot-Element immer kleinstes oder grösstes Element

- insgesamt n-1 (nichttriviale) rekursive Aufrufe für Länge $n, n-1, \ldots, 2$.
- jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung

$\rightarrow$ $\Theta(n^2)$

Quicksort: Laufzeit II

Average case:

- Annahme: n verschiedene Elemente,
  jede der $n!$ Permutationen gleich wahrscheinlich,
  Pivotelement zufällig gewählt
- $O(\log n)$ rekursive Aufrufe
- insgesamt $O(n \log n)$
- etwa 39% langsamer als best case

Quicksort: Laufzeit II

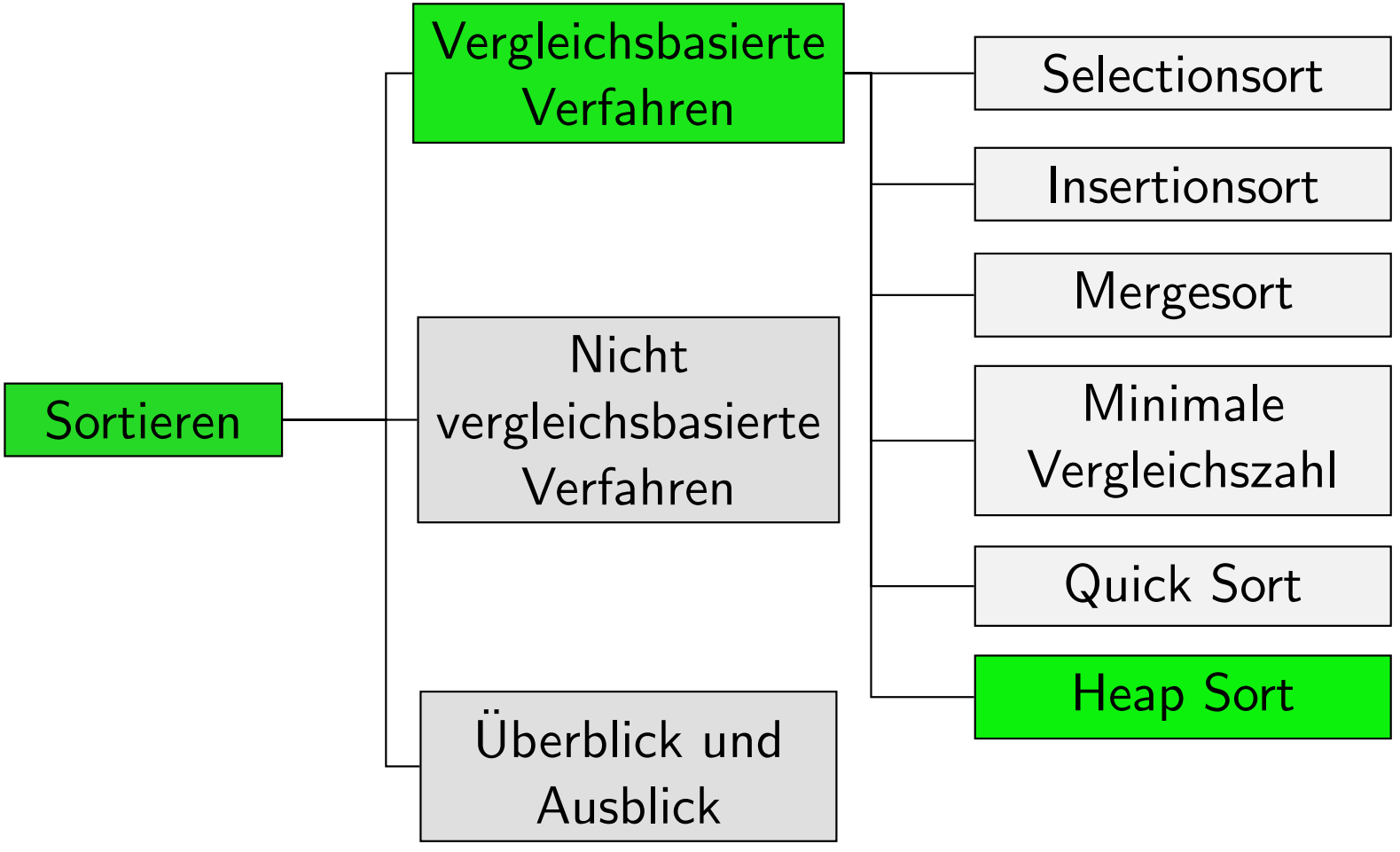
Average case:

- Annahme: n verschiedene Elemente,
  jede der $n!$ Permutationen gleich wahrscheinlich,
  Pivotelement zufällig gewählt
- $O(\log n)$ rekursive Aufrufe
- insgesamt $O(n \log n)$
- etwa 39% langsamer als best case

Bei randomisierter Pivotwahl tritt worst-case quasi nicht auf.
Quicksort wird daher oft als $O(n \log n)$-Verfahren betrachtet.

Heapsort

Sortierverfahren



Heapsort

- Heap: Datenstruktur, die das Finden und Entnehmen des grössten Elements besonders effizient unterstützt
  Finden: $\Theta(1)$, Entnehmen: $\Theta(\log n)$
- Grundidee analog zu Selectionsort: Setze sukzessive das grösste Element an das Ende des unsortierten Bereichs.
- Kann den Heap direkt in der Eingabesequenz repräsentieren, so dass Heapsort nur konstanten zusätzlichen Speicherplatz benötigt.
- Die Laufzeit von Heapsort ist leicht überlinear.
- Wir besprechen die Details später, wenn wir Heaps genauer kennengelernt haben.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Quicksort ist ein Divide-and-Conquer-Verfahren, das die Elemente relativ zu einem Pivotelement aufteilt.
- Im Worst-case hat Quicksort ein quadratisches Laufzeitverhalten.
- Im Average-case ist die Laufzeit leicht überlinear.
- Bei randomisierter Pivotwahl tritt der Worst-case fast nie auf.