Algorithmen und Datenstrukturen

A8. Laufzeitanalyse: Top-Down-Mergesort

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

17. März 2022

Inhalt dieser Veranstaltung

- A&D
  - Sortieren
  - Komplexitäts-analyse
  - Fundamentale Datenstrukturen
  - Suchen
  - Graphen
  - Strings
  - Weiterführende Themen

Was bisher geschah und wie es weiter geht

- Zuletzt: sehr detaillierte Laufzeitanalyse für Selectionsort und Bottom-Up-Mergesort
- heute noch analoge Analyse für Top-Down-Mergesort als Beispiel eines rekursiven Divide-and-Conquer-Verfahrens
- danach Landau-Symbole für asymptotisches Laufzeitverhalten
- und die „schnelle" Laufzeitanalyse in der Praxis

Beispiel: Top-Down-Mergesort

Merge-Schritt-Ergebnis vom letzten Mal

```
def merge(array, tmp, lo, mid, hi):
    i = lo
    j = mid + 1
    for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo,...,hi
        if j > hi or (i <= mid and array[i] <= array[j]):
            tmp[k] = array[i]
            i += 1
        else:
            tmp[k] = array[j]
            j += 1
    for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo,...,hi
        array[k] = tmp[k]
```

Theorem

Der Merge-Schritt hat lineare Laufzeit, d.h. es gibt Konstanten $c, c', n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$: $cn \leq T(n) \leq c'n$.

Top-Down-Mergesort

```
1  def sort(array):
2      tmp = [0] * len(array)  # [0,...,0] with same size as array
3      sort_aux(array, tmp, 0, len(array) - 1)
4
5  def sort_aux(array, tmp, lo, hi):
6      if hi <= lo:
7          return
8      mid = lo + (hi - lo) // 2
9      sort_aux(array, tmp, lo, mid)
10     sort_aux(array, tmp, mid + 1, hi)
11     merge(array, tmp, lo, mid, hi)
```

Analyse für $m = \text{hi} - \text{lo} + 1$

c_0 für Zeile 6–7

c_1 für Zeile 6–8

$c_2 m$ für Merge-Schritt

Top-Down-Mergesort: Analyse I

Laufzeit `sort_aux`

- $T(m) = c_1 + 2T(m/2) + c_2 m$ für $m = 2^k, k \in \mathbb{N}_0$
- $T(1) = c_0$
- Rekursive Gleichung
- Wir suchen obere Schranke, die nur von m abhängt.

Top-Down-Mergesort: Analyse II

Betrachte $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$T(m) = c_1 + 2T(m/2) + c_2 m$$

Top-Down-Mergesort: Analyse II

Betrachte $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\begin{aligned} T(m) &= c_1 + 2T(m/2) + c_2 m \\ &= c_1 + 2(c_1 + 2T(m/4) + c_2(m/2)) + c_2 m \end{aligned}$$

Top-Down-Mergesort: Analyse II

Betrachte $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\begin{aligned}
T(m) &= c_1 + 2T(m/2) + c_2 m \\
&= c_1 + 2(c_1 + 2T(m/4) + c_2(m/2)) + c_2 m \\
&= c_1(1+2) + 2mc_2 + 4T(m/4)
\end{aligned}$$

Top-Down-Mergesort: Analyse II

Betrachte $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$
\begin{aligned}
T(m) &= c_1 + 2T(m/2) + c_2 m \\
&= c_1 + 2(c_1 + 2T(m/4) + c_2(m/2)) + c_2 m \\
&= c_1(1+2) + 2mc_2 + 4T(m/4) \\
&= c_1(1+2) + 2mc_2 + 4(c_1 + 2T(m/8) + c_2(m/4))
\end{aligned}
$$

Top-Down-Mergesort: Analyse II

Betrachte $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$
\begin{aligned}
T(m) &= c_1 + 2T(m/2) + c_2 m \\
&= c_1 + 2(c_1 + 2T(m/4) + c_2(m/2)) + c_2 m \\
&= c_1(1+2) + 2mc_2 + 4T(m/4) \\
&= c_1(1+2) + 2mc_2 + 4(c_1 + 2T(m/8) + c_2(m/4)) \\
&= c_1(1+2+4) + 3mc_2 + 8T(m/8)
\end{aligned}
$$

Top-Down-Mergesort: Analyse II

Betrachte $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$
\begin{aligned}
T(m) &= c_1 + 2T(m/2) + c_2 m \\
&= c_1 + 2(c_1 + 2T(m/4) + c_2(m/2)) + c_2 m \\
&= c_1(1+2) + 2mc_2 + 4T(m/4) \\
&= c_1(1+2) + 2mc_2 + 4(c_1 + 2T(m/8) + c_2(m/4)) \\
&= c_1(1+2+4) + 3mc_2 + 8T(m/8) \\
&= \dots \\
&= c_1\Big(\sum_{i=0}^{k-1} 2^i\Big) + kmc_2 + 2^k c_0 \\
&= c_1\Big(\sum_{i=0}^{k-1} 2^i\Big) + c_2 m \log_2 m + mc_0 \qquad (k = \log_2 m, 2^k = m)
\end{aligned}
$$

Top-Down-Mergesort: Analyse II

Betrachte $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\begin{aligned}
T(m) &= c_1 + 2T(m/2) + c_2 m \\
&= c_1 + 2(c_1 + 2T(m/4) + c_2(m/2)) + c_2 m \\
&= c_1(1+2) + 2mc_2 + 4T(m/4) \\
&= c_1(1+2) + 2mc_2 + 4(c_1 + 2T(m/8) + c_2(m/4)) \\
&= c_1(1+2+4) + 3mc_2 + 8T(m/8) \\
&= \dots \\
&= c_1\left(\sum_{i=0}^{k-1} 2^i\right) + kmc_2 + 2^k c_0 \\
&= c_1\left(\sum_{i=0}^{k-1} 2^i\right) + c_2 m \log_2 m + mc_0 \qquad (k = \log_2 m, 2^k = m) \\
&\leq c_1 k 2^{k-1} + c_2 m \log_2 m + mc_0 \\
&\leq c_1 m \log_2 m + c_2 m \log_2 m + mc_0 \\
&\leq (c_0 + c_1 + c_2) m \log_2 m \qquad (\log_2 m = k \geq 1)
\end{aligned}$$

Top-Down-Mergesort: Analyse III

m keine Zweierpotenz? $2^{k-1} < m < 2^k$

$$
\begin{aligned}
T(m) &= c_1 + T(\lfloor m/2 \rfloor) + T(\lceil m/2 \rceil) + c_2 m \\
&\leq c_1 + 2T(2^k/2) + c_2 m \\
&\leq c 2^k \log_2 2^k \text{ für irgendein } c \\
&< 2cm \log_2(2m) \qquad (2^k < 2m, \text{ da } m > 2^{k-1}) \\
&= 2cm(\log_2 2 + \log_2 m) \\
&= 2cm(1 + \log_2 m) \leq 4cm \log_2 m \quad (1 \leq \log_2 m \text{ für } m \geq 2)
\end{aligned}
$$

Top-Down-Mergesort: Analyse III

m keine Zweierpotenz? $2^{k-1} < m < 2^k$

$$
\begin{aligned}
T(m) &= c_1 + T(\lfloor m/2 \rfloor) + T(\lceil m/2 \rceil) + c_2 m \\
&\leq c_1 + 2T(2^k/2) + c_2 m \\
&\leq c 2^k \log_2 2^k \text{ für irgendein } c \\
&< 2cm \log_2(2m) \qquad (2^k < 2m, \text{ da } m > 2^{k-1}) \\
&= 2cm(\log_2 2 + \log_2 m) \\
&= 2cm(1 + \log_2 m) \leq 4cm \log_2 m \quad (1 \leq \log_2 m \text{ für } m \geq 2)
\end{aligned}
$$

Obere Schranke $c' m \log_2 m$ gilt allgemein (für irgendein c')

Top-Down-Mergesort: Analyse III

m keine Zweierpotenz? $2^{k-1} < m < 2^k$

$$\begin{aligned} T(m) &= c_1 + T(\lfloor m/2 \rfloor) + T(\lceil m/2 \rceil) + c_2 m \\ &\le c_1 + 2T(2^k/2) + c_2 m \\ &\le c 2^k \log_2 2^k \text{ für irgendein } c \\ &< 2cm \log_2(2m) \qquad (2^k < 2m, \text{ da } m > 2^{k-1}) \\ &= 2cm(\log_2 2 + \log_2 m) \\ &= 2cm(1 + \log_2 m) \le 4cm \log_2 m \quad (1 \le \log_2 m \text{ für } m \ge 2) \end{aligned}$$

Obere Schranke $c' m \log_2 m$ gilt allgemein (für irgendein c')

Untere Schranke?
$T(m) = c_1 \sum_{i=0}^{k-1} 2^i + c_2 m \log_2 m + m c_0 \ge c_2 m \log_2 m$
Untere Schranke $cm \log_2 m$ (für irgendein c)

Top-Down-Mergesort: Analyse IV

`sort`?

- Aufruf von `sort_aux` mit $m = n =$ Länge der Eingabe

Top-Down-Mergesort: Analyse IV

`sort`?

- Aufruf von `sort_aux` mit $m = n =$ Länge der Eingabe
- Anlegen/Kopieren von Array geht in linearer Zeit
  $\rightarrow$ kann durch Anpassung der Konstanten abgedeckt werden.

Top-Down-Mergesort: Analyse IV

sort?

- Aufruf von sort_aux mit $m = n =$ Länge der Eingabe
- Anlegen/Kopieren von Array geht in linearer Zeit
  $\rightarrow$ kann durch Anpassung der Konstanten abgedeckt werden.

Theorem

Top-Down-Mergesort hat leicht überlineare Laufzeit, d.h. es gibt Konstanten $c, c', n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$,
$cn \log_2 n \leq T(n) \leq c' n \log_2 n$.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Mergesort hat auch in der Top-Down-Variante leicht überlineare Laufzeit.