Algorithmen und Datenstrukturen

A7. Laufzeitanalyse: Bottom-Up-Mergesort

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

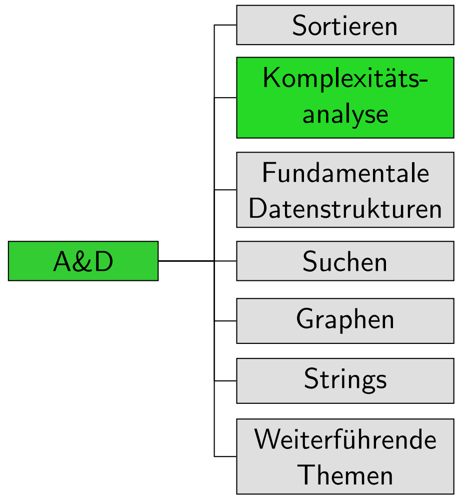
16. März 2022

Algorithmen und Datenstrukturen

16. März 2022 — A7. Laufzeitanalyse: Bottom-Up-Mergesort

A7.1 Laufzeitanalyse Bottom-Up-Mergesort

Inhalt dieser Veranstaltung



Merge-Schritt

```
     def merge(array, tmp, lo, mid, hi):
         i = lo
c1       j = mid + 1
         for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo,...,hi
             if j > hi or (i <= mid and array[i] <= array[j]):
                 tmp[k] = array[i]
                 i += 1
c2           else:
                 tmp[k] = array[j]
                 j += 1
         for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo,...,hi
c3           array[k] = tmp[k]
```

Wir analysieren Laufzeit für $m := \text{hi} - \text{lo} + 1$

Merge-Schritt: Analyse

$$\begin{aligned} T(m) &= c_1 + c_2 m + c_3 m \\ &\geq (c_2 + c_3) m \end{aligned}$$

Für $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} T(m) &= c_1 + c_2 m + c_3 m \\ &\leq c_1 m + c_2 m + c_3 m \\ &= (c_1 + c_2 + c_3) m \end{aligned}$$

Theorem

Der Merge-Schritt hat lineare Laufzeit, d.h. es gibt Konstanten $c, c', n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$: $cn \leq T(n) \leq c'n$.

Bottom-Up-Mergesort

```
1  def sort(array):
2      n = len(array)
3      tmp = list(array)
4      length = 1
5      while length < n:
6          lo = 0
7          while lo < n - length:
8              mid = lo + length - 1
9              hi = min(lo + 2 * length - 1, n - 1)
10             merge(array, tmp, lo, mid, hi)
11             lo += 2 * length
12         length *= 2
```

Wir verwenden für die Abschätzung:

c_1 Zeilen 2–4

c_2 Zeilen 6 und 12

c_3 Zeilen 8,9,11

Annahme: merge benötigt c_4(hi-lo+1) Operationen.

Bottom-Up-Mergesort: Analyse I

Annahme: $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$

Iterationen der äusseren Schleife (m für hi-lo+1):

- Iteration 1: $n/2$ mal innere Schleife mit Merge für $m = 2$
  $c_2 + n/2(c_3 + 2c_4) = c_2 + 0.5c_3 n + c_4 n$
- Iteration 2: $n/4$ mal innere Schleife mit Merge für $m = 4$
  $c_2 + n/4(c_3 + 4c_4) = c_2 + 0.25c_3 n + c_4 n$
- ...
- Äussere Schleife endet nach letzter Iteration ℓ.
- Iteration ℓ: 1 mal innere Schleife mit Merge für $m = n$
  $c_2 + n/n(c_3 + nc_4) = c_2 + c_3 + c_4 n$

Insgesamt $T(n) \leq c_1 + \ell(c_2 + c_3 n + c_4 n) \leq \ell(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)n$

Bottom-Up-Mergesort: Analyse II

Wie gross ist ℓ?

- In Iteration i ist für den Merge-Schritt $m = 2^i$
- In Iteration ℓ hat Merge-Schritt $m = 2^\ell = n$
- Da $n = 2^k$ ist $\ell = k = \log_2 n$.

Mit $c := c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ erhalten wir $T(n) \leq cn \log_2 n$.

Bottom-Up-Mergesort: Analyse III

Was, wenn n keine Zweierpotenz, also $2^{k-1} < n < 2^k$?

- Trotzdem k Iterationen der äusseren Schleife.
- Innere Schleife verwendet nicht mehr Operationen.
- $T(n) \leq cnk = cn(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) \leq 2cn \log_2 n$ (für $k > 2$)

Bottom-Up-Mergesort: Analyse IV

Ähnliche Abschätzung auch für untere Schranke möglich.
→ Übung

Theorem
Bottom-Up-Mergesort hat leicht überlineare Laufzeit, d.h. es gibt Konstanten $c, c', n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $cn \log_2 n \leq T(n) \leq c' n \log_2 n$.

Leicht überlineare Laufzeit

Leicht überlineare Laufzeit $n \log_2 n$:
→ doppelt so grosse Eingabe, etwas mehr als doppelt so lange Laufzeit

Was bedeutet das in der Praxis?

- Annahme: $c = 1$, eine Operation dauert im Schnitt 10^{-8} Sek.
- Bei 1 Tsd. Elementen warten wir $10^{-8} \cdot 10^3 \log_2(10^3) \approx$ 0.0001 Sekunden.
- Bei 10 Tsd. Elementen $\approx$ 0.0013 Sekunden
- Bei 100 Tsd. Elementen $\approx$ 0.017 Sekunden
- Bei 1 Mio. Elementen $\approx$ 0.2 Sekunden
- Bei 1 Mrd. Elementen $\approx$ 299 Sekunden

Laufzeit $n \log_2 n$ nicht viel schlechter als lineare Laufzeit

Mergesort mit Kostenmodell I

Schlüsselvergleiche

- Werden nur in `merge` durchgeführt.
- Mergen zweier Teilfolgen der Länge m und n benötigt bestenfalls $\min(n, m)$ und schlimmstenfalls $n + m - 1$ Vergleiche.
- Bei zwei etwa gleich langen Teilfolgen sind das linear viele Vergleiche, d.h. es gibt $c, c' > 0$, so dass Anzahl Vergleiche zwischen cn und $c'n$ liegt.

→ Anzahl der zum Sortieren einer Sequenz notwendigen Schlüsselvergleiche ist leicht überlinear in der Länge der Sequenz (analog zu Laufzeitanalyse).

Mergesort mit Kostenmodell II

Elementbewegungen

- Werden nur in `merge` durchgeführt.
- $2n$ Bewegungen für Sequenz der Länge n.
- Insgesamt für Mergesort leicht überlinear (analog zu Schlüsselvergleichen)

A7.2 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Mergesort hat leicht überlineare Laufzeit, Schlüsselvergleiche und Elementbewegungen.