

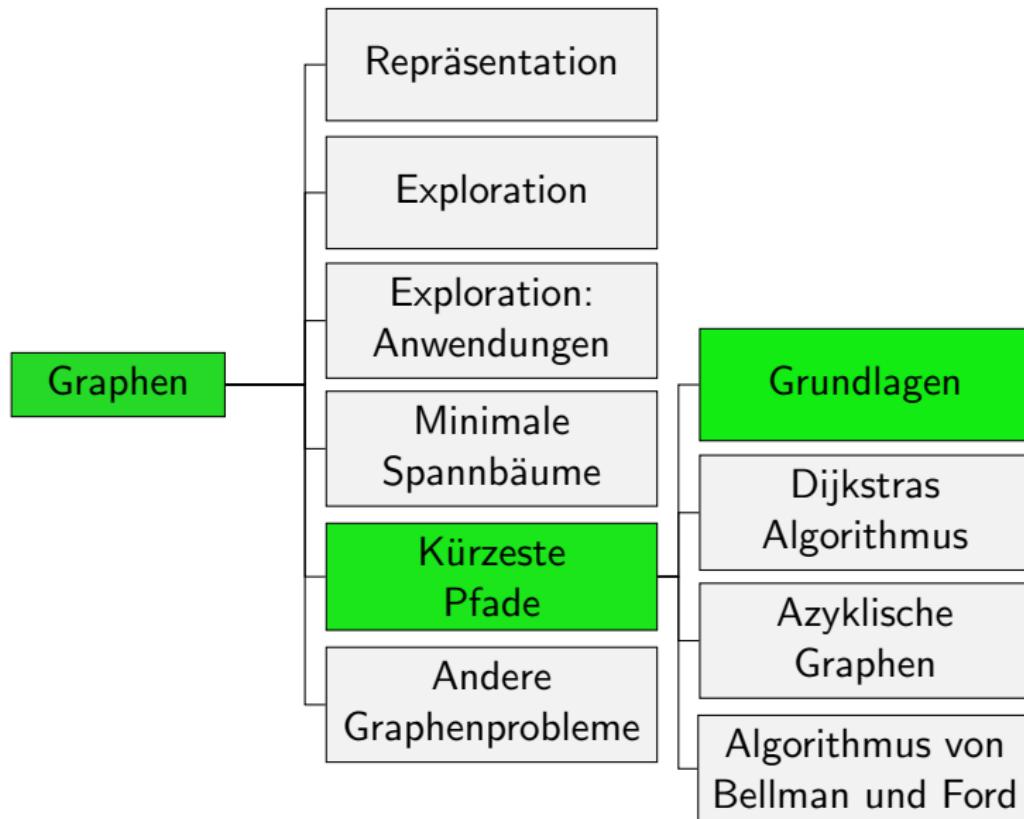
Algorithmen und Datenstrukturen

C5. Kürzeste Pfade: Grundlagen

Gabriele Röger

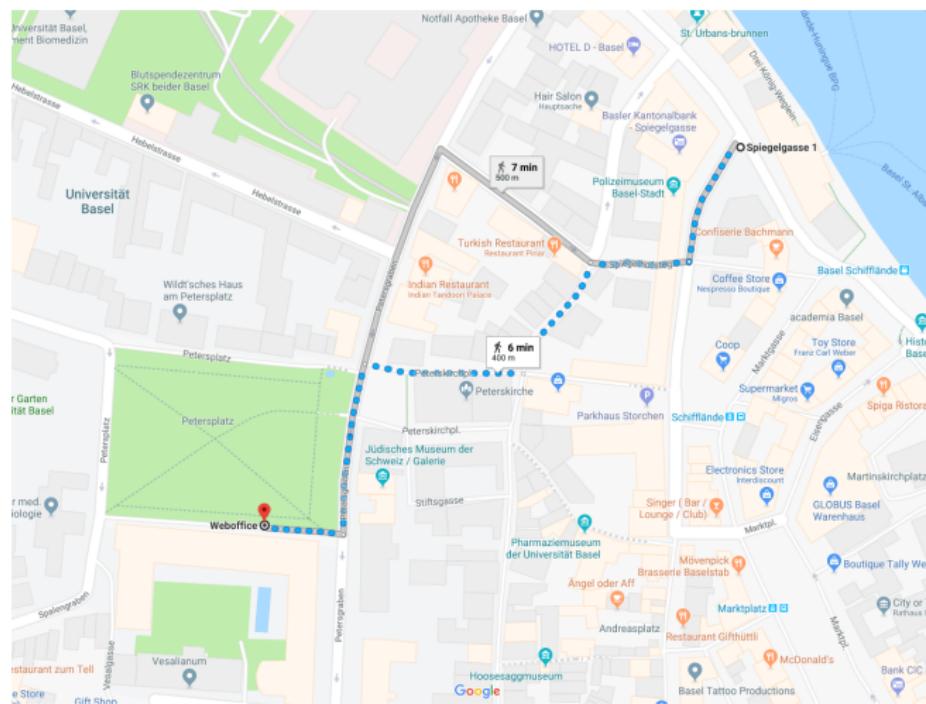
Universität Basel

Graphen: Übersicht



Einführung

Google Maps



Inhaltsabhängige Bildverzerrung (Seam Carving)



Anwendungen

- Routenplanung
- Pfadplanung in Computerspielen
- Roboternavigation
- Seam Carving
- Handlungsplanung
- Typesetting in TeX
- Routingprotokolle in Netzwerken (OSPF, BGP, RIP)
- Routing von Telekommunikationsnachrichten
- Verkehrsplanung
- Ausnutzen von Arbitrage-Möglichkeiten in Wechselkursen

Quelle (teilweise): Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications,
R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, Prentice Hall, 1993

Varianten

Was interessiert uns?

- Single source: von einem Knoten s zu allen anderen Knoten
- Single sink: von allen Knoten zu einem Knoten t
- Source-sink: von Knoten s zu Knoten t
- All pairs: von jedem Knoten zu jedem anderen

Varianten

Was interessiert uns?

- Single source: von einem Knoten s zu allen anderen Knoten
- Single sink: von allen Knoten zu einem Knoten t
- Source-sink: von Knoten s zu Knoten t
- All pairs: von jedem Knoten zu jedem anderen

Grapheigenschaften

- Beliebige / nicht-negative / euklidische Gewichte
- Beliebige / nicht-negative / keine Zyklen

Grundlagen

Gewichtete gerichtete Graphen

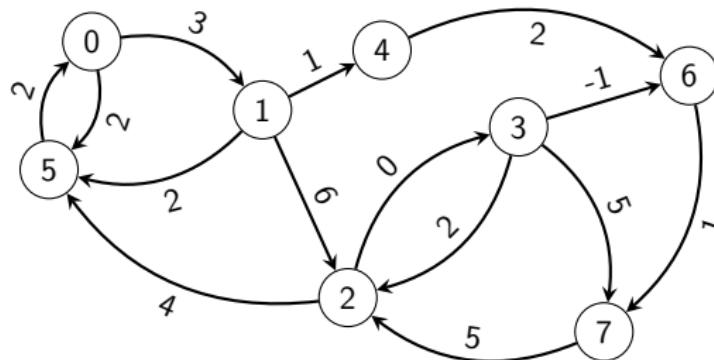
Die (high-level) Definition gewichteter Graphen bleibt gleich,
wir betrachten jetzt aber gerichtete Graphen.

Gewichtete gerichtete Graphen

Die (high-level) Definition gewichteter Graphen bleibt gleich, wir betrachten jetzt aber gerichtete Graphen.

Gewichteter Graph

Bei einem (kanten-)gewichteten Graphen hat jede Kante $e \in E$ ein Gewicht (oder Kosten) $weight(e)$ aus den reellen Zahlen.



Erinnerung: Ein gerichteter Graph heisst auch **Digraph**.

API für gewichtete, gerichtete Kante

```
1 class DirectedEdge:  
2     # Kante von n1 zu n2 mit Gewicht w  
3     def __init__(n1: int, n2: int, w: float) -> None  
4  
5     # Gewicht der Kante  
6     def weight() -> float  
7  
8     # Knoten, von dem Kante ausgeht  
9     def from_node() -> int  
10  
11    # Knoten, zu dem die Kante führt  
12    def to_node() -> int
```

API für gewichtete Digraphen

```
1  class EdgeWeightedDigraph:  
2      # Graph mit no_nodes Knoten und keinen Kanten  
3      def __init__(no_nodes: int) -> None  
4  
5          # Füge gewichtete Kante hinzu  
6          def add_edge(e: DirectedEdge) -> None  
7  
8          # Anzahl der Knoten  
9          def no_nodes() -> int  
10  
11         # Anzahl der Kanten  
12         def no_edges() -> int  
13  
14         # Alle Kanten, die von n ausgehen  
15         def adjacent_edges(n: int) -> Generator[DirectedEdge]  
16  
17         # Alle Kanten  
18         def all_edges() -> Generator[DirectedEdge]
```

Kürzeste-Pfade-Problem

Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Startknoten, SSSP

- Gegeben: Graph und Startknoten s
- Anfrage für Knoten v
 - Gibt es Pfad von s nach v ?
 - Wenn ja, was ist der kürzeste Pfad?

Engl. single-source shortest paths problem

Kürzeste-Pfade-Problem

Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Startknoten, SSSP

- Gegeben: Graph und Startknoten s
- Anfrage für Knoten v
 - Gibt es Pfad von s nach v ?
 - Wenn ja, was ist der kürzeste Pfad?
- In **kantengewichteten Graphen**:
Kürzester Pfad ist der mit dem **geringstem Gewicht**
(= minimale Summe der Kantenkosten)

Engl. [single-source shortest paths problem](#)

API für Kürzeste-Pfade-Implementierungen

Die Algorithmen für kürzeste Pfade sollen folgendes Interface implementieren:

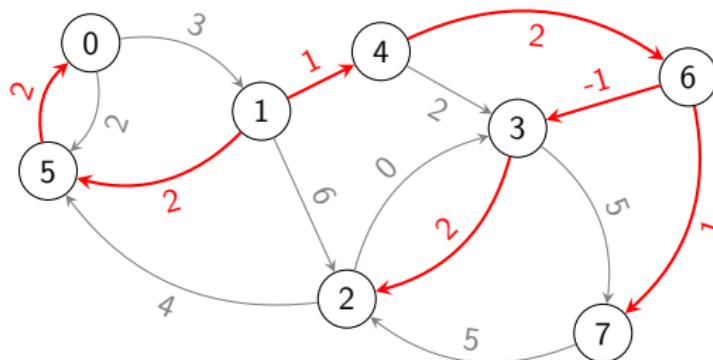
```
1 class ShortestPaths:  
2     # Konstruktor mit Startknoten s  
3     def __init__(graph: EdgeWeightedDigraph, s: int) -> None  
4  
5     # Abstand von s zu v; infinity, falls kein Pfad existiert  
6     def dist_to(v: int) -> float  
7  
8     # Gibt es Pfad von s zu v?  
9     def has_path_to(v: int) -> bool  
10  
11    # Pfad von s zu v; None, falls keiner vorhanden  
12    def path_to(v: int) -> Generator[DirectedEdge]
```

Kürzeste-Pfade-Baum

Kürzeste-Pfade-Baum

Für einen kantengewichteten Digraphen G und Knoten s ist ein **Kürzeste-Pfade-Baum** ein Teilgraph, der

- einen gerichteten Baum mit Wurzel s bildet,
- alle von s aus erreichbaren Knoten enthält, und
- bei dem jeder Baumpfad ein kürzester Pfad in G ist.



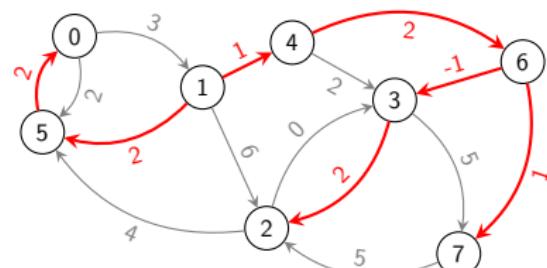
Kürzeste-Pfade-Baum: Repräsentation

Repräsentation: knotenindizierte Arrays

- parent mit Elternknotenreferenz
Leer für nicht erreichbare und Startknoten
- distance mit Abstand vom Startknoten
 ∞ für nicht erreichbare Knoten

parent	0	1	2	3	4	5	6	7
	5		3	6	1	1	4	6

distance	0	1	2	3	4	5	6	7
	4	0	4	2	1	2	3	4



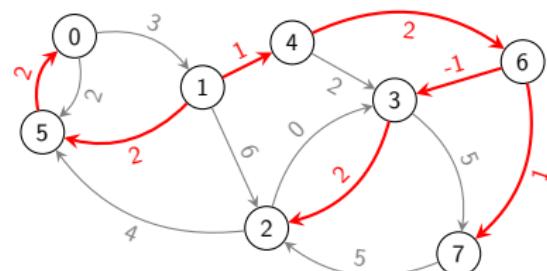
Kürzeste-Pfade-Baum: Repräsentation

Repräsentation: knotenindizierte Arrays

- parent mit Elternknotenreferenz
Leer für nicht erreichbare und Startknoten
- distance mit Abstand vom Startknoten
 ∞ für nicht erreichbare Knoten

parent	0	1	2	3	4	5	6	7
	5		3	6	1	1	4	6

distance	0	1	2	3	4	5	6	7
	4	0	4	2	1	2	3	4



Was ist mit parallelen Kanten?

Extraktion der kürzesten Pfade

```
1  def path_to(self, node):
2      if self.distance[node] == float('inf'):
3          yield None
4      elif node == self.start:
5          yield node
6      else:
7          # output path from start to parent node
8          self.path_to(self.parent[node])
9          # finish with node
10         yield node
```

Kantenrelaxierung

Kantenrelaxierung für Kante (u, v)

- `distance[u]`: Länge des kürzesten bekannten Pfades zu u
- `distance[v]`: Länge des kürzesten bekannten Pfades zu v
- `parent[v]`: Vorgänger in letzter Kante des kürzesten bekannten Weges zu v
- Ermöglicht Kante (u, v) einen kürzeren Weg zu v (durch u)?
- Dann update `distance[v]` und `parent[v]`.

Illustration: Tafel

Kantenrelaxierung

```
1  def relax(self, edge):
2      u = edge.from_node()
3      v = edge.to_node()
4      if self.distance[v] > self.distance[u] + edge.weight():
5          self.parent[v] = u
6          self.distance[v] = self.distance[u] + edge.weight()
```

Optimalitätskriterium und Generisches Verfahren

Optimalitätskriterium

Theorem

Sei G ein gewichteter Digraph ohne negative Zyklen.

Array $distance[]$ enthält die Kosten der kürzesten Pfade von s genau dann, wenn

- ① $distance[s] = 0$
- ② $distance[w] \leq distance[v] + weight(e)$
für alle Kanten $e = (v, w)$, und
- ③ *für alle Knoten v ist $distance[v]$ die Länge irgendeines Pfades von s zu v bzw. ∞ , falls kein solcher Pfad existiert.*

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis

„ \Rightarrow “

Da der Graph keine Zyklen mit negativen Gesamtkosten enthält, kann kein Pfad von s zu s negative Kosten haben. Die Kosten des leeren Pfades sind damit optimal und $distance[s]$ ist 0.

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis

„ \Rightarrow “

Da der Graph keine Zyklen mit negativen Gesamtkosten enthält, kann kein Pfad von s zu s negative Kosten haben. Die Kosten des leeren Pfades sind damit optimal und $distance[s]$ ist 0.

Betrachte beliebige Kante e von u nach v .

Der kürzeste Pfad von s nach u hat Kosten $distance[u]$.

Erweitern wir diesen Pfad um Kante e , erhalten wir einen Pfad von s zu v mit Kosten $distance[u] + weight(e)$. Die Kosten eines kürzesten Pfades von s zu v können also nicht grösser sein und es gilt $distance[v] \leq distance[u] + weight(e)$.

...

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis (Fortsetzung).

„ \Leftarrow “

Für unerreichbare Knoten ist der Wert per Definition unendlich.

Betrachte beliebigen Knoten v und kürzesten Pfad

$p = (v_0, \dots, v_n)$ von s zu v , d.h. $v_0 = s$, $v_n = v$.

Sei e_i jeweils eine günstigste Kante von v_{i-1} zu v_i .

Da alle Ungleichungen erfüllt sind, gilt

$$\begin{aligned}\text{distance}[v_n] &\leq \text{distance}[v_{n-1}] + \text{weight}(e_n) \\ &\leq \text{distance}[v_{n-2}] + \text{weight}(e_{n-1}) + \text{weight}(e_n) \\ &\leq \dots \leq \text{weight}(e_1) + \dots + \text{weight}(e_n) \\ &= \text{Kosten des optimalen Pfads}\end{aligned}$$

Wegen Punkt 3 ist $\text{distance}[v_n]$ auch nicht echt kleiner als die optimalen Pfadkosten. □

Generischer Algorithmus

Generischer Algorithmus für Startknoten s

- Initialisiere $\text{distance}[s] = 0$ und $\text{distance}[v] = \infty$ für alle anderen Knoten
- Solange das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist:
Relaxiere eine beliebige Kante

Korrekt:

- Endliches $\text{distance}[v]$ entspricht immer den Kosten eines Pfades von s zu v .
- Jede erfolgreiche Relaxierung reduziert $\text{distance}[v]$ für ein v .
- Für jeden Knoten kann Distanz nur endlich oft reduziert werden.