# Algorithmen und Datenstrukturen

## B10. Hashtabellen

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

# Einführung

# Symboltabellen: Übersicht

| | Worst-case | | | Average-case | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Implementation | suchen | einfügen | löschen | suchen (hit) | einfügen | löschen |
| Verkettete Liste | N | N | N | N/2 | N | N/2 |
| Binäre suche | $\log_2(N)$ | N | N | $\log_2(N)$ | $N/2$ | N |
| BST | $N$ | $N$ | $N$ | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ | $\sqrt{N}$ |
| Rot-Schwarz Bäume | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ |

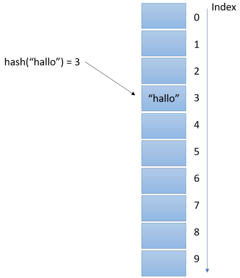
**Frage**

Geht es noch besser?

# Hashtabellen: Idee

Elemente werden in Array gespeichert, wobei Position durch Schlüssel bestimmt ist.

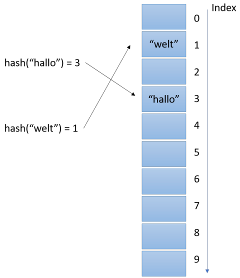
- Wichtigstes Werkzeug: Hashfunktion
  - Berechnet Index aus Schlüssel



# Hashtabellen: Idee

Elemente werden in Array gespeichert, wobei Position durch Schlüssel bestimmt ist.

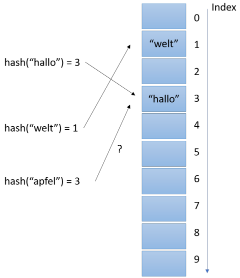
- Wichtigstes Werkzeug: Hashfunktion
  - Berechnet Index aus Schlüssel



# Hashtabellen: Idee

Elemente werden in Array gespeichert, wobei Position durch Schlüssel bestimmt ist.

- Wichtigstes Werkzeug: Hashfunktion
  - Berechnet Index aus Schlüssel




Herausforderungen:

- Hashfunktion berechnen
- Kollisionen (2 unterschiedliche Schlüssel haben gleichen Hashwert)

# Hashfunktionen

# Hashfunktion: Ziele

- Konsistenz: Gleicher Schlüssel sollte immer gleichen Hashwert ergeben.
- Hashfunktion sollte effizient berechnet werden können.
- Schlüssel sollten gleichverteilt sein.
  - gleiche Wahrscheinlichkeit für jedes Feld

# Quiz: Hashfunktion

Was sind mögliche Hashfunktionen für

- Integer (32 Bit Ganzzahl)
- Datum
- Strings
- Bilder

Wie aufwändig ist jeweils die Berechnung der Hashfunktion?

# Hashfunktionen in Java

Alle Java Klassen erben Methode `hashCode`

Anforderung:

- Falls `x.equals(y)` dann `x.hashCode() == y.hashCode()`

Gewünscht:

- Falls `!x.equals(y)` dann `x.hashCode() != y.hashCode()`

Wenn immer `equals` überschrieben wird, muss auch `hashCode` überschrieben werden.

# Beispiele von Hashfunktionen in Java

Integer:

```
public int hashCode() {
    return this.value;
}
```

# Beispiele von Hashfunktionen in Java

String:

```
public int hashCode() {
    int h = 0;
    if (value.length > 0) {
        char val[] = value;

        for (int i = 0; i < value.length; i++) {
            h = 31 * h + val[i];
        }
    }
    return h;
}
```

# Beispiele von Hashfunktionen in Java

LinkedList:

```
public int hashCode() {
    int hashCode = 1;
    for (E e : this)
        hashCode = 31 * hashCode + (e==null ? 0 : e.hashCode());
    return hashCode;
}
```

# Praktisches Rezept für benutzerdefinierte Typen

```
public int hashCode()
{
    int hash = 17;
    hash = 31*hash + field1.hashCode();
    hash = 31*hash + field2.hashCode();
    hash = 31*hash + field3.hashCode();
    ...
    return hash;
}
```

Funktioniert gut in Praxis - aber theoretisch nicht optimal.

# Praktische Tips

Gute Hashfunktionen zu entwerfen ist schwierig!

Einige Tips:

- Alle Bits im Schlüssel sollten bei Berechnung gleich mitberücksichtigt werden.
  - Verbessert Verteilung!
  - Experimentell überprüfen (plot?)
- Hashing ist klassischer Performancebug. (Alles läuft korrekt aber Programm ist langsam.)
  - Hashfunktion auf Effizienz prüfen.
  - Was ist schneller, Vergleich oder Hash?

# Hashfuntionen in Python

- Hashfunktionen werden via die Methode `__hash__` angegeben.

**`__hash__()`**

Called by built-in function hash() and for operations on members of hashed collections including set, frozenset, and dict. `__hash__()` should return an integer. The only required property is that objects which compare equal have the same hash value; it is advised to mix together the hash values of the components of the object that also play a part in comparison of objects by packing them into a tuple and hashing the tuple.

Python Language Reference - Section 3: Data Model

# Modulares Hashing

Werte der Hashfunktion können negativ sein. Wir wollen aber Werte zwischen 0 und $M$.

- Positiven Hash-wert nehmen und Modulo $M$ rechnen.

In Java:

```
private int modularHash(Key x) {
    return (x.hashCode() & 0x7fffffff) % M;
}
```

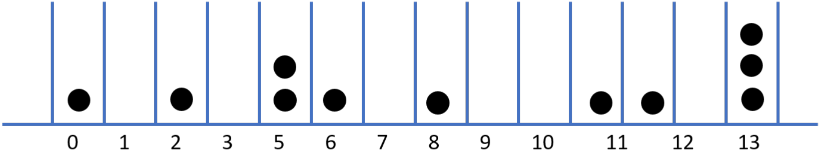
In Python:

```
def modularHash(x):
    return (hash(x) % ((sys.maxsize + 1) * 2) % M)
```

# Theoretische Analyse von Hashtabellen

**Typische Annahme**

Die von uns verwendeten Hashfunktionen verteilen die Schlüssel gleichmäßig und unabhängig voneinander auf die Integer-Werte zwischen 0 und $M - 1$.




Bälle werden zufällig in $M$ verschiedene Gefässe verteilt.

# Kollisionen

Wir können Kollisionen nicht verhindern.

Beispiele relevanter mathematischer Resultate:

Geburtstagsparadox In einer Gruppe von 23 Kindern ist die Wahrscheinlichkeit 0.5, dass zwei am selben Tag Geburtstag haben.

- Angewandt auf hashing: Anzahl Plätze: $M = 365$, Nach $N = 23$ Elementen bereits grosse Chance, dass Kollision auftritt.
- Allgemein: Wir erwarten Kollision nach ungefähr $\sqrt{\pi M/2}$ Elementen.

# Kollisionen

Wir können Kollisionen nicht verhindern.

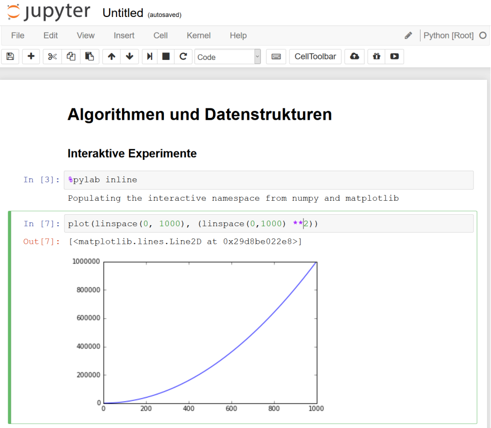
Beispiele relevanter mathematischer Resultate:

**Sammelbilderproblem** Gegeben $M$ Sammelbilder, wieviele Bilder muss man ziehen (mit zurücklegen), bevor man jedes einmal gezogen hat?

- Angewandt auf hashing: Wie lange dauert es bis alle Felder besetzt sind?
- Der Erwartungswert wächst mit $\Theta(M \log(M))$

Um $M = 50$ unterschiedliche Sammelbilder zu haben benötigen wir ungefähr $50 \log(50) \approx 200$ Bilder

# Experimente




IPython Notebooks: Hashtables.ipynb

# Hashtabellen

# Hashtabelle: 2 Implementationen

Grundlage ist immer ein Array der Grösse $M$ um $N$ Einträge zu speichern.
Wichtigste Frage: Wie behandle ich Kollisionen?
2 Strategien

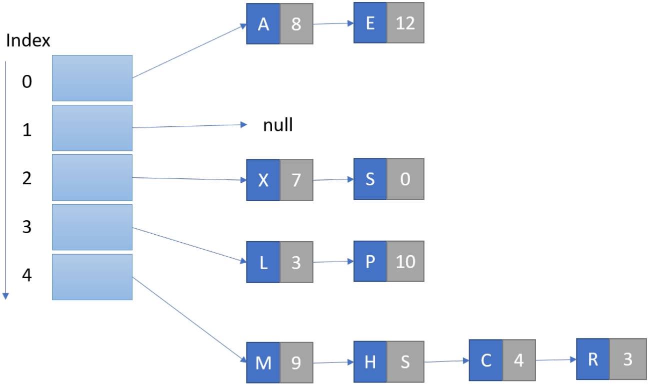
- Verkettung (separate chaining)
  - Jedes Element enthält Verkettete Liste mit allen Schlüssel / Werte Paaren
  - $M$ kann kleiner sein als $N$
- Lineare Sondierung (linear probing)
  - $M$ wird grösser gewählt als $N$.
    - Suche nach nächstem freien Platz.

# Verkettung

**Hash:** Schlüssel wird auf Zahl zwischen 0 und $M-1$ gemappt.

**Einfügen:** Falls nicht gefunden, am Anfang in Liste enfügen

**Suche:** Relevante Liste durchsuchen



# Komplexität

**Theorem**

*In einer auf Verkettung basierenden Hashtabelle mit $M$ Listen und $N$ Schlüsseln ist die Wahrscheinlichkeit (unter der Gleichverteilungsannahme ), dass die Anzahl der Schlüssel in einer Liste bis auf einen kleinen konstanten Faktor bei $N/M$ liegt, extrem nahe an 1.*

# Komplexität

**Theorem**

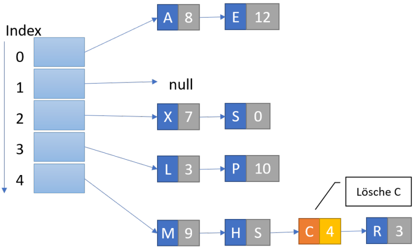
*In einer auf Verkettung basierenden Hashtabelle mit $M$ Listen und $N$ Schlüsseln ist die Wahrscheinlichkeit (unter der Gleichverteilungsannahme ), dass die Anzahl der Schlüssel in einer Liste bis auf einen kleinen konstanten Faktor bei $N/M$ liegt, extrem nahe an 1.*

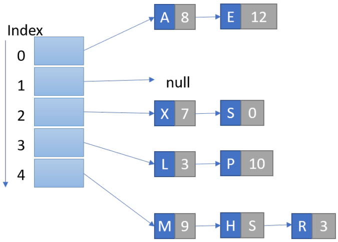
**Theorem**

*In einer auf Verkettung basierenden Hashtabelle mit $M$ Listen und $N$ Schlüsseln ist die Anzahl der Vergleiche (Gleichheitstests) für Einfügungen und erfolglose Suchen $\sim N/M$.*

# Verkettung: Elemente Löschen

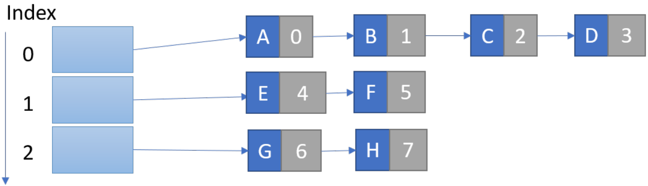
- Einfache Operation: Element aus relevanter Liste löschen.

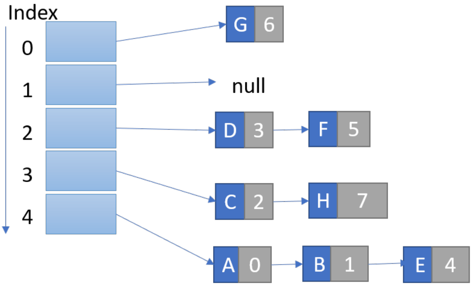


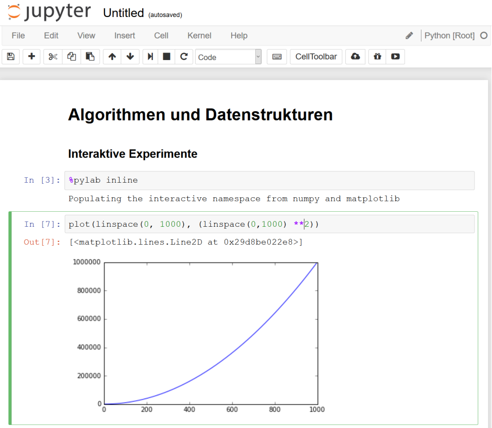
# Verkettung: Grössenanpassung

- Ziel: Länge N/M bleibt etwa konstant
- Alle Elemente müssen neu gehashed werden.



# Implementation und Beispielanwendung




IPython Notebooks: Hashtables.ipynb

# Informatiker des Tages : Arthur Lee Samuel

Arthur Lee Samuel

- Professor in Stanford
- Mitentwickler von TEX
- Pionier in Künstlicher Intelligenz / Maschinellem lernen
  - Entwickelte erstes erfolgreiches Dame-Programm.
- Erste Implementation der linearen Sondierungsstrategie in Hashtabellen (1953)

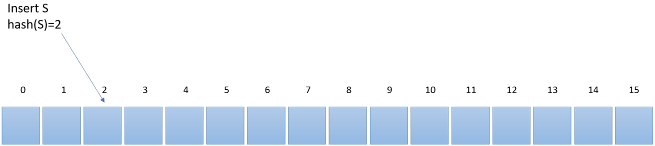
# Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

Hash: Schlüssel wird auf Zahl $i$ zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: An Position $i$ einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1$, $i + 2$, ...



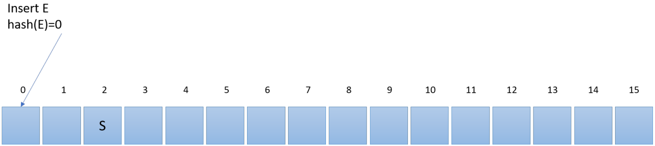
# Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

**Hash:** Schlüssel wird auf Zahl $i$ zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

**Einfügen:** An Position $i$ einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1$, $i + 2$, ...



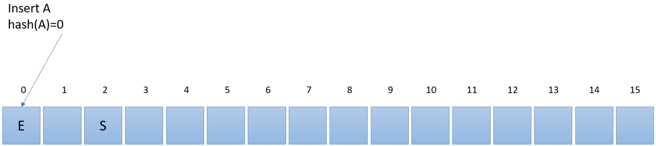
# Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

**Hash:** Schlüssel wird auf Zahl $i$ zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

**Einfügen:** An Position $i$ einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1$, $i + 2$, ...



# Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

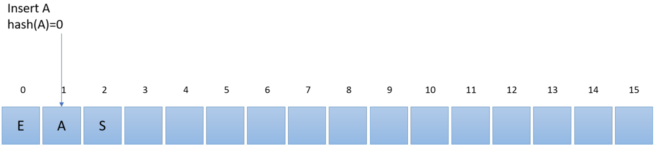
**Hash:** Schlüssel wird auf Zahl $i$ zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

**Einfügen:** An Position $i$ einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1$, $i + 2$, ...

**Suche:** Suche an Index i

- Falls nicht leer, aber Eintrag $! =$ gesuchter Schlüssel, suche an Position $i + 1, i + 2$, etc.



# Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

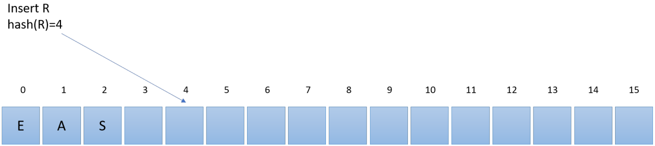
**Hash:** Schlüssel wird auf Zahl $i$ zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

**Einfügen:** An Position $i$ einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1$, $i + 2$, ...

**Suche:** Suche an Index i

- Falls nicht leer, aber Eintrag $! =$ gesuchter Schlüssel, suche an Position $i + 1, i + 2$, etc.



# Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

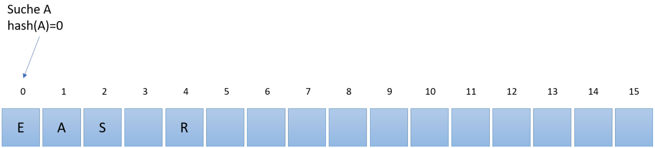
**Hash:** Schlüssel wird auf Zahl $i$ zwischen 0 und $M-1$ gemappt.

**Einfügen:** An Position $i$ einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i+1$, $i+2$, ...

**Suche:** Suche an Index i

- Falls nicht leer, aber Eintrag $! =$ gesuchter Schlüssel, suche an Position $i+1, i+2$, etc.



# Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

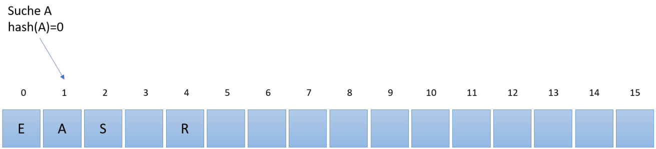
**Hash:** Schlüssel wird auf Zahl $i$ zwischen 0 und $M-1$ gemappt.

**Einfügen:** An Position $i$ einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i+1$, $i+2$, ...

**Suche:** Suche an Index i

- Falls nicht leer, aber Eintrag $!=$ gesuchter Schlüssel, suche an Position $i+1, i+2$, etc.



# Lineare Sondierung: Elemente Löschen

- Wenn erstes Element in Cluster gelöscht wird, müssen Nachfolger gelöscht werden.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Schlüssel | E | A | S | | R | | | X | F | I | | | Q | | | |

Was ist wenn hash(I)=7?

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Schlüssel | E | A | S | | R | | | X | F | I | | | Q | | | |

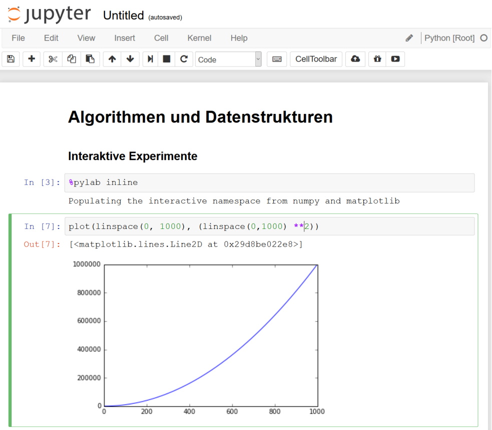
# Lineare Sondierung: Grössenanpassung

- Ziel: Länge $N/M \leq 1/2$
- Alle Elemente müssen neu gehashed werden.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Schlüssel | E | A | S | | R | | |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Schlüssel | E | | | | | | | A | | | R | | | | S | |

# Implementation und Beispielanwendung




IPython Notebooks: Hashtables.ipynb

# Clustering

## Beobachtung

Lineares Sondieren führt zu Clusterbildung.

- Bei Kollision wächst ein Cluster, da das Element am Ende eingefügt wird.

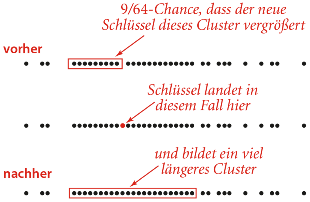
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | A | S | X | R | | | | X | Q | | | I | | | | |

# Clustering

## Beobachtung

Lange Cluster wachsen schneller als kurze.

- Wahrscheinlichkeit in einem grossen Cluster zu landen ist grösser.




Quelle: Abb. 3.60, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

# Clustering

## Beobachtung

Laufzeit der Suche hängt von Länge der Cluster ab.

## Theorem

*In einer auf linearer Sondierung basierenden Hashtabelle mit einer Liste der Grösse $M$ und $N = \alpha M$ Schlüsseln ist die erforderliche durchschnittliche Anzahl von Sondierungen für erfolgreiches beziehungsweise erfolgloses Suchen*

$$\sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right) \quad \textit{und} \quad \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$$

# Komplexität

| | Worst-case | | | Average-case | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Implementation | suchen | einfügen | löschen | suchen (hit) | einfügen | löschen |
| Verkettete Liste | N | N | N | N/2 | N | N/2 |
| Binäre suche | $\log_2(N)$ | N | N | $\log_2(N)$ | $N/2$ | N |
| BST | $N$ | $N$ | $N$ | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ | $\sqrt{N}$ |
| Rot-Schwarz Bäume | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ | $\log_2(N)$ |
| Hashtabellen | $N$ | $N$ | $N$ | $O(1)$ | $O(1)$ | $O(1)$ |

# Diskussion

Wann sollen wir welche Art von Datenstruktur verwenden?

| implementation | guarantee | | | average case | | | ordered ops? | key interface |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | search | insert | delete | search hit | insert | delete | | |
| **sequential search (unordered list)** | $N$ | $N$ | $N$ | ½ $N$ | $N$ | ½ $N$ | | `equals()` |
| **binary search (ordered array)** | $\lg N$ | $N$ | $N$ | $\lg N$ | ½ $N$ | ½ $N$ | ✔ | `compareTo()` |
| **BST** | $N$ | $N$ | $N$ | $1.39 \lg N$ | $1.39 \lg N$ | $\sqrt{N}$ | ✔ | `compareTo()` |
| **red-black BST** | $2 \lg N$ | $2 \lg N$ | $2 \lg N$ | $1.0 \lg N$ | $1.0 \lg N$ | $1.0 \lg N$ | ✔ | `compareTo()` |
| **separate chaining** | $N$ | $N$ | $N$ | 3-5 * | 3-5 * | 3-5 * | | `equals()` `hashCode()` |
| **linear probing** | $N$ | $N$ | $N$ | 3-5 * | 3-5 * | 3-5 * | | `equals()` `hashCode()` |

Abbildung: Sedgewick & Wayne, Tabelle 3.15