Algorithmen und Datenstrukturen

B10. Hashtabellen

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

Algorithmen und Datenstrukturen
— B10. Hashtabellen

B10.1 Einführung

B10.2 Hashfunktionen

B10.3 Hashtabellen

B10.1 Einführung

Symboltabellen: Übersicht

	Worst-case			Average-case		
Implementation	suchen	einfügen	löschen	suchen (hit)	einfügen	löschen
Verkettete Liste	N	N	N	N/2	N	N/2
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	N	$\log_2(N)$	$N/2$	N
BST	N	N	N	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\sqrt{N}$
Rot-Schwarz Bäume	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$

Frage

Geht es noch besser?

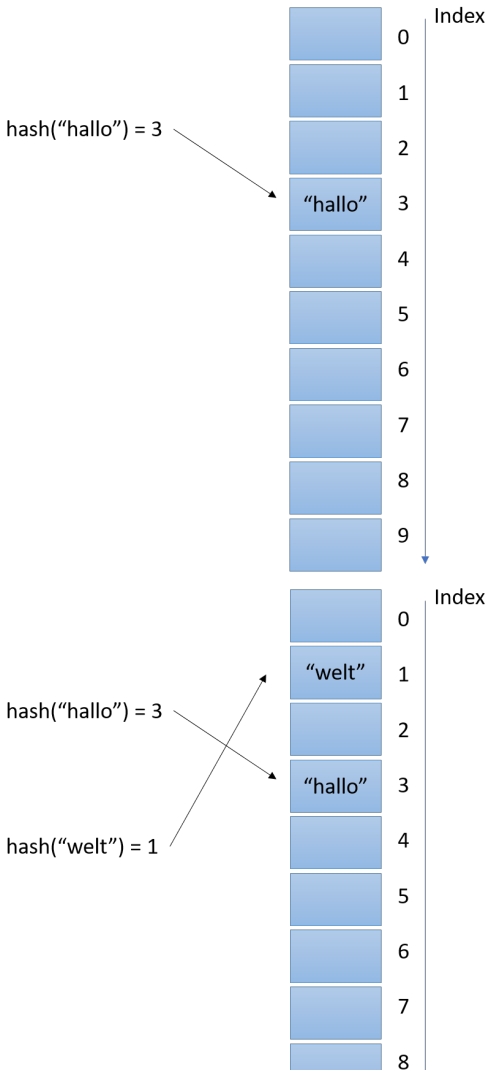
Hashtabellen: Idee

Elemente werden in Array gespeichert, wobei Position durch Schlüssel bestimmt ist.

- Wichtigstes Werkzeug: Hashfunktion
  - Berechnet Index aus Schlüssel

Herausforderungen:

- Hashfunktion berechnen
- Kollisionen (2 unterschiedliche Schlüssel haben gleichen Hashwert)



B10.2 Hashfunktionen

Hashfunktion: Ziele

- Konsistenz: Gleicher Schlüssel sollte immer gleichen Hashwert ergeben.
- Hashfunktion sollte effizient berechnet werden können.
- Schlüssel sollten gleichverteilt sein.
  - gleiche Wahrscheinlichkeit für jedes Feld

Quiz: Hashfunktion

Was sind mögliche Hashfunktionen für

- Integer (32 Bit Ganzzahl)
- Datum
- Strings
- Bilder

Wie aufwändig ist jeweils die Berechnung der Hashfunktion?

Hashfunktionen in Java

Alle Java Klassen erben Methode `hashCode`
Anforderung:

- Falls `x.equals(y)` dann `x.hashCode()` == `y.hashCode()`

Gewünscht:

- Falls `!x.equals(y)` dann `x.hashCode()` != `y.hashCode()`

Wenn immer `equals` überschrieben wird, muss auch `hashCode` überschrieben werden.

Beispiele von Hashfunktionen in Java

Integer:

```
public int hashCode() {
    return this.value;
}
```

Beispiele von Hashfunktionen in Java

String:

```
public int hashCode() {
    int h = 0;
    if (value.length > 0) {
        char val[] = value;

        for (int i = 0; i < value.length; i++) {
            h = 31 * h + val[i];
        }
    }
    return h;
}
```

Beispiele von Hashfunktionen in Java

LinkedList:

```
public int hashCode() {
    int hashCode = 1;
    for (E e : this)
        hashCode = 31 * hashCode + (e==null ? 0 : e.hashCode());
    return hashCode;
}
```

Praktisches Rezept für benutzerdefinierte Typen

```
public int hashCode()
{
    int hash = 17;
    hash = 31*hash + field1.hashCode();
    hash = 31*hash + field2.hashCode();
    hash = 31*hash + field3.hashCode();
    ...
    return hash;
}
```

Funktioniert gut in Praxis - aber theoretisch nicht optimal.

Praktische Tips

Gute Hashfunktionen zu entwerfen ist schwierig!

Einige Tips:

- Alle Bits im Schlüssel sollten bei Berechnung gleich mitberücksichtigt werden.
  - Verbessert Verteilung!
  - Experimentell überprüfen (plot?)
- Hashing ist klassischer Performancebug. (Alles läuft korrekt aber Programm ist langsam.)
  - Hashfunktion auf Effizienz prüfen.
  - Was ist schneller, Vergleich oder Hash?

Hashfuntionen in Python

- Hashfunktionen werden via die Methode `__hash__` angegeben.

> `__hash__()`
> Called by built-in function hash() and for operations on members of hashed collections including set, frozenset, and dict. `__hash__()` should return an integer. The only required property is that objects which compare equal have the same hash value; it is advised to mix together the hash values of the components of the object that also play a part in comparison of objects by packing them into a tuple and hashing the tuple.
>
> Python Language Reference - Section 3: Data Model

Modulares Hashing

Werte der Hashfunktion können negativ sein. Wir wollen aber Werte zwischen 0 und M.

- Positiven Hash-wert nehmen und Modulo M rechnen.

In Java:

```
private int modularHash(Key x) {
    return (x.hashCode() & 0x7fffffff) % M;
}
```

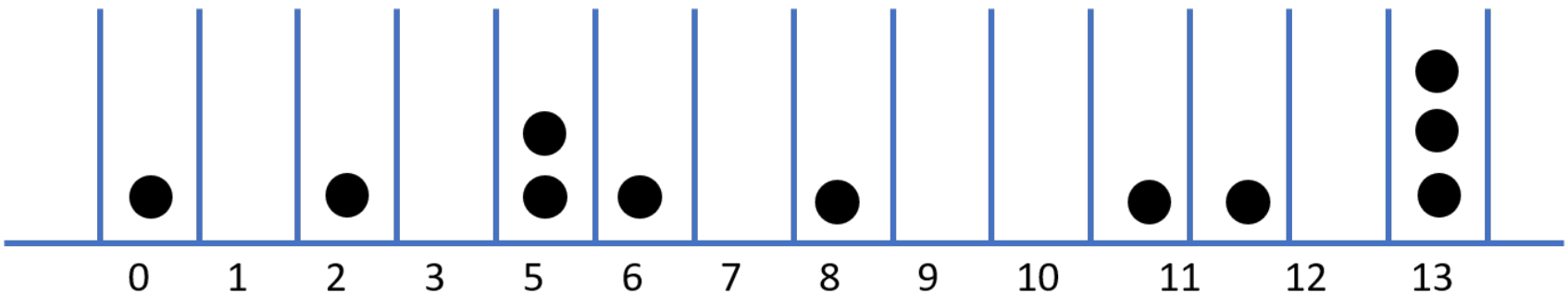
In Python:

```
def modularHash(x):
    return (hash(x) % ((sys.maxsize + 1) * 2) % M)
```

Theoretische Analyse von Hashtabellen

Typische Annahme

Die von uns verwendeten Hashfunktionen verteilen die Schlüssel gleichmäßig und unabhängig voneinander auf die Integer-Werte zwischen 0 und $M - 1$.



Bälle werden zufällig in M verschiedene Gefässe verteilt.

Kollisionen

Wir können Kollisionen nicht verhindern.

Beispiele relevanter mathematischer Resultate:

Geburtstagsparadox In einer Gruppe von 23 Kindern ist die Wahrscheinlichkeit 0.5, dass zwei am selben Tag Geburtstag haben.

- Angewandt auf hashing: Anzahl Plätze: $M = 365$, Nach $N = 23$ Elementen bereits grosse Chance, dass Kollision auftritt.
- Allgemein: Wir erwarten Kollision nach ungefähr $\sqrt{\pi M/2}$ Elementen.

Kollisionen

Wir können Kollisionen nicht verhindern.

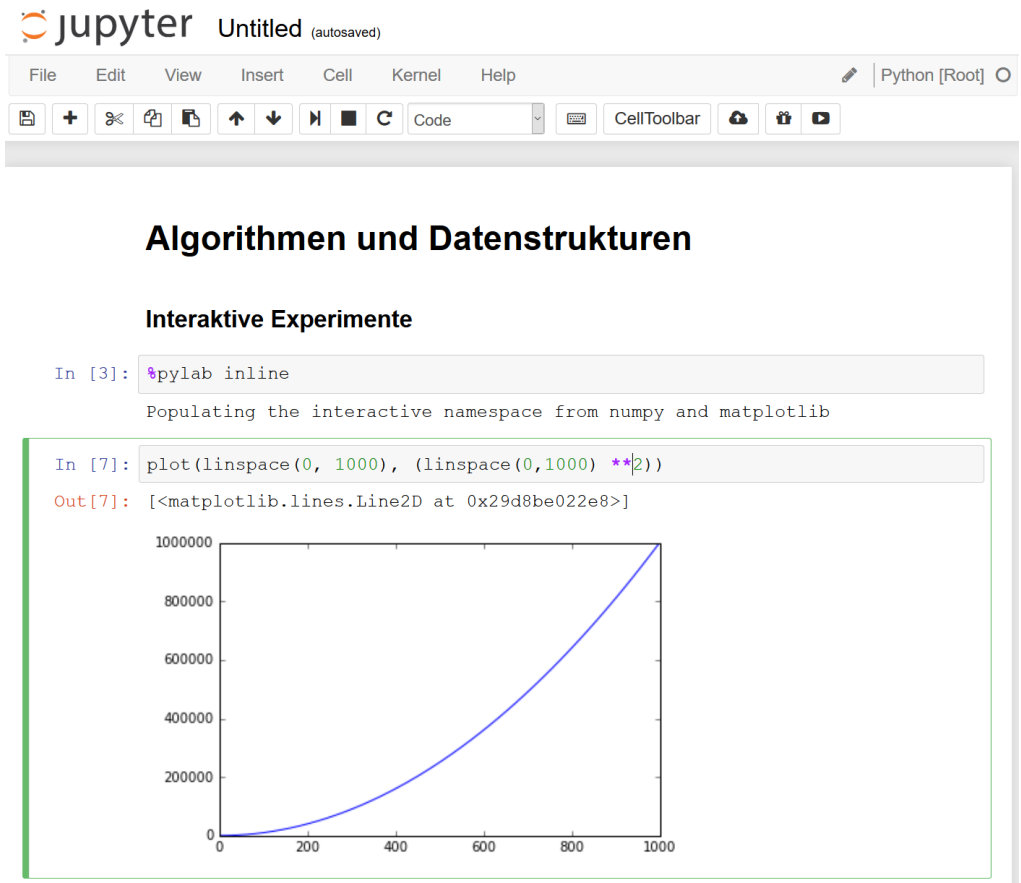
Beispiele relevanter mathematischer Resultate:

Sammelbilderproblem Gegeben M Sammelbilder, wieviele Bilder muss man ziehen (mit zurücklegen), bevor man jedes einmal gezogen hat?

- Angewandt auf hashing: Wie lange dauert es bis alle Felder besetzt sind?
- Der Erwartungswert wächst mit $\Theta(M \log(M))$

Um $M = 50$ unterschiedliche Sammelbilder zu haben benötigen wir ungefähr $50 \log(50) \approx 200$ Bilder

Experimente



IPython Notebooks: Hashtables.ipynb

B10.3 Hashtabellen

Hashtabelle: 2 Implementationen

Grundlage ist immer ein Array der Grösse M um N Einträge zu speichern.
Wichtigste Frage: Wie behandle ich Kollisionen?
2 Strategien

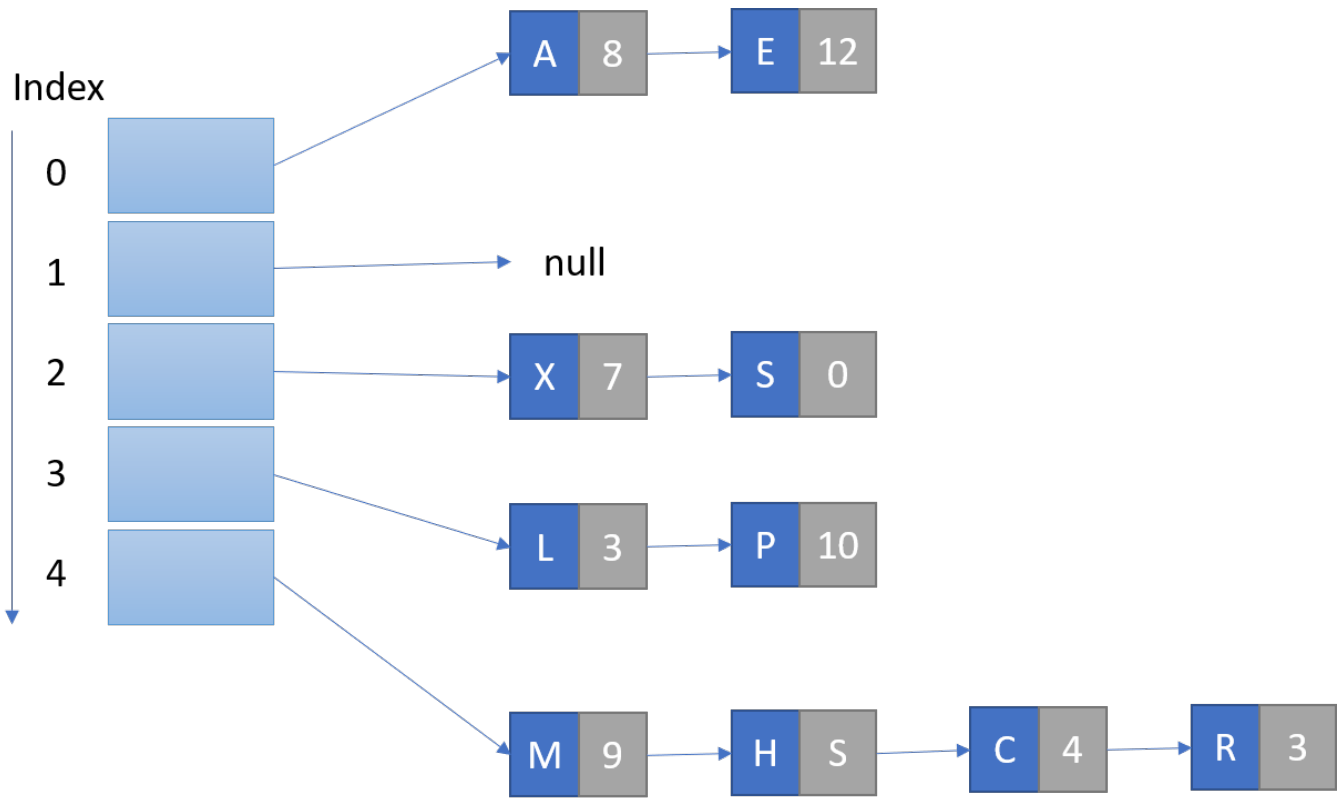
- Verkettung (separate chaining)
  - Jedes Element enthält Verkettete Liste mit allen Schlüssel / Werte Paaren
  - M kann kleiner sein als N
- Lineare Sondierung (linear probing)
  - M wird grösser gewählt als N.
    - Suche nach nächstem freien Platz.

Verkettung

Hash: Schlüssel wird auf Zahl zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: Falls nicht gefunden, am Anfang in Liste enfügen

Suche: Relevante Liste durchsuchen



Komplexität

Theorem

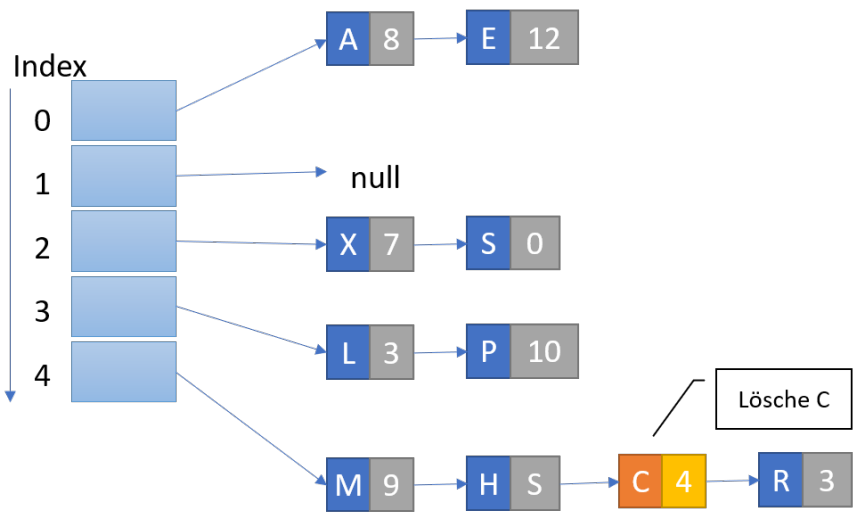
In einer auf Verkettung basierenden Hashtabelle mit M Listen und N Schlüsseln ist die Wahrscheinlichkeit (unter der Gleichverteilungsannahme), dass die Anzahl der Schlüssel in einer Liste bis auf einen kleinen konstanten Faktor bei N/M liegt, extrem nahe an 1.

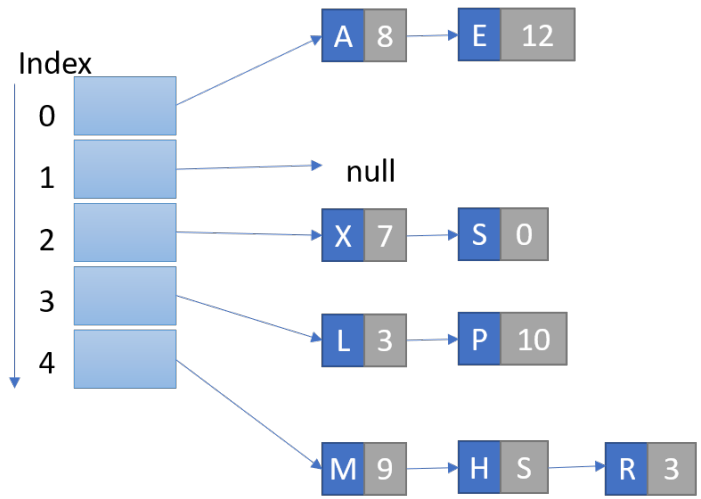
Theorem

In einer auf Verkettung basierenden Hashtabelle mit M Listen und N Schlüsseln ist die Anzahl der Vergleiche (Gleichheitstests) für Einfügungen und erfolglose Suchen $\sim N/M$.

Verkettung: Elemente Löschen

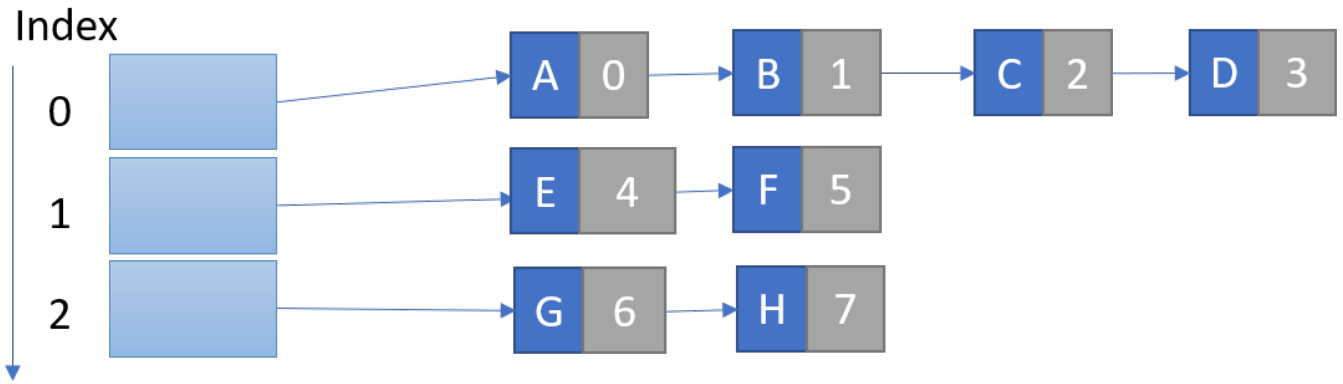
- Einfache Operation: Element aus relevanter Liste löschen.

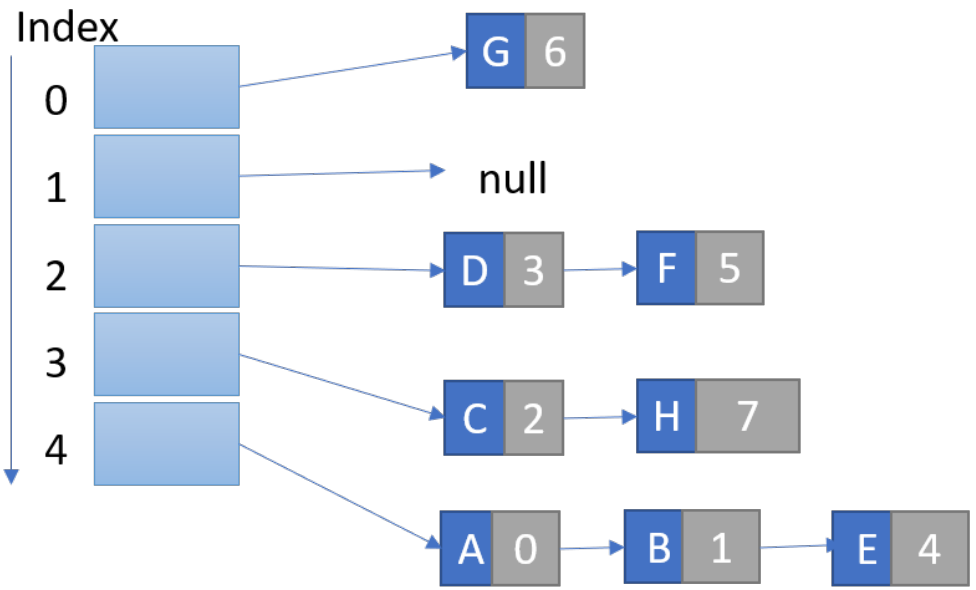




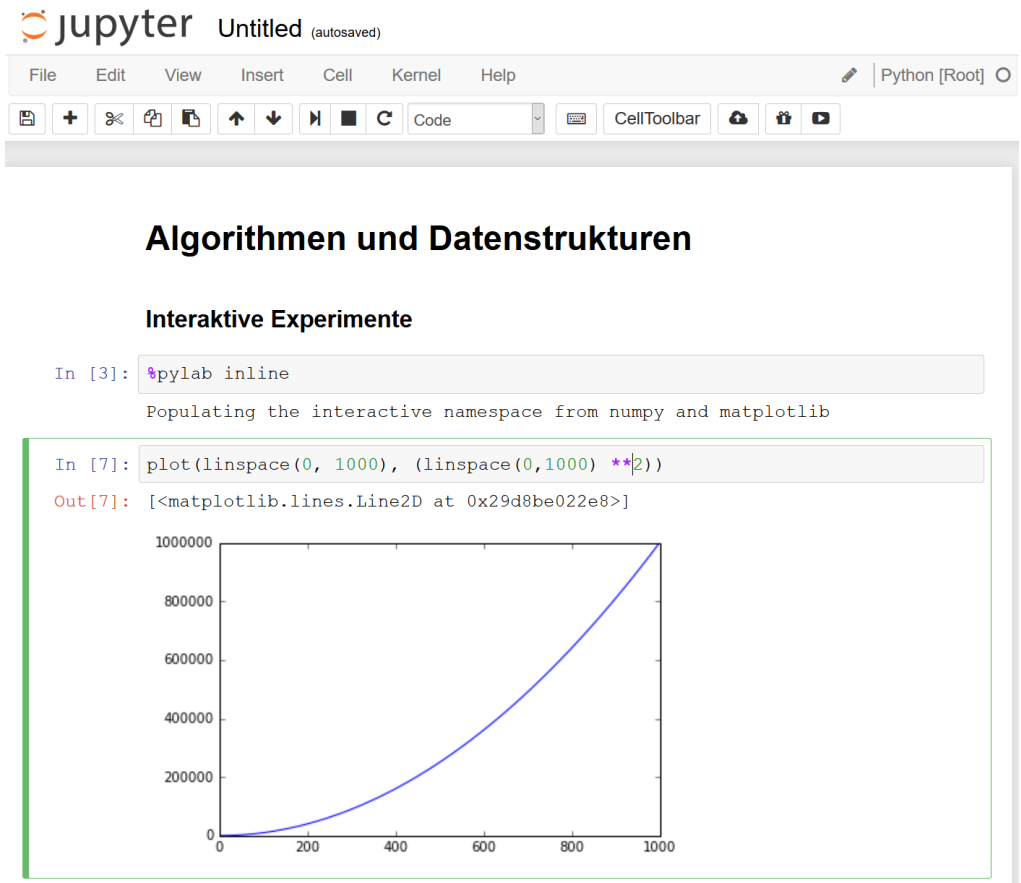
Verkettung: Grössenanpassung

- Ziel: Länge N/M bleibt etwa konstant
- Alle Elemente müssen neu gehashed werden.





Implementation und Beispielanwendung



IPython Notebooks: Hashtables.ipynb

Informatiker des Tages : Arthur Lee Samuel

Arthur Lee Samuel

- Professor in Stanford
- Mitentwickler von TEX
- Pionier in Künstlicher Intelligenz / Maschinellem lernen
  - Entwickelte erstes erfolgreiches Dame-Programm.
- Erste Implementation der linearen Sondierungsstrategie in Hashtabellen (1953)

Lineares sondieren

Voraussetzung: $M > N$

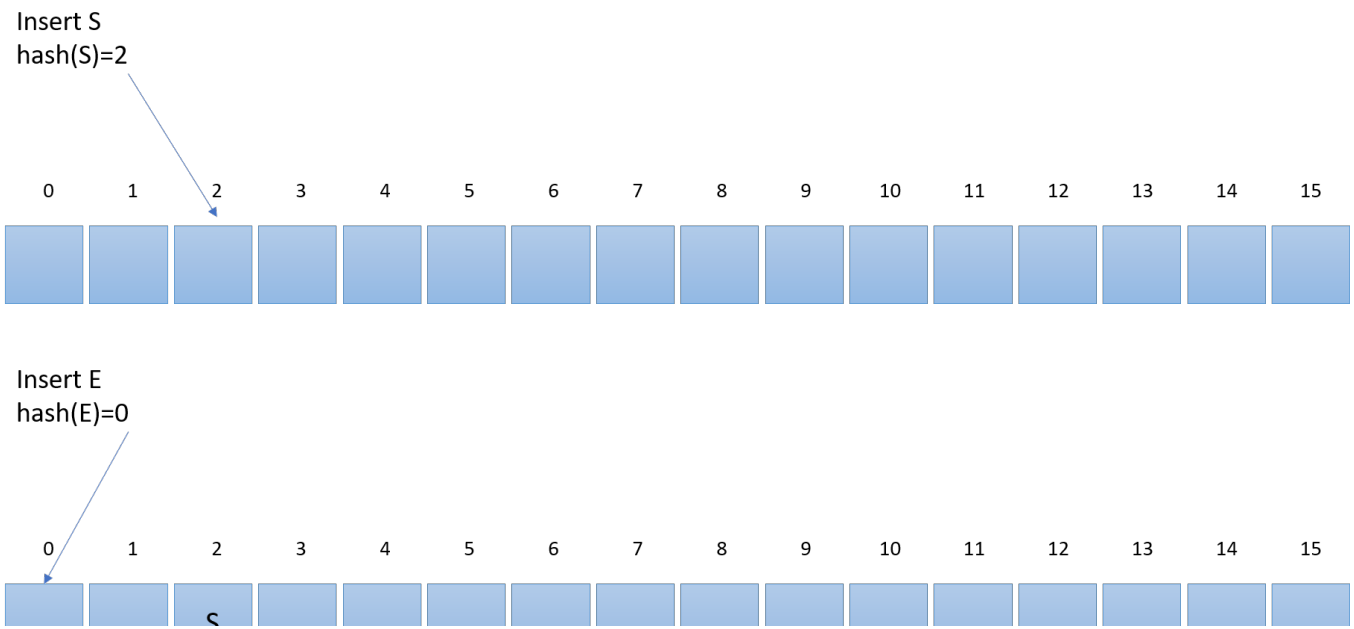
Hash: Schlüssel wird auf Zahl i zwischen 0 und $M - 1$ gemappt.

Einfügen: An Position i einfügen.

- Falls belegt, probiere Position $i + 1$, $i + 2$, ...

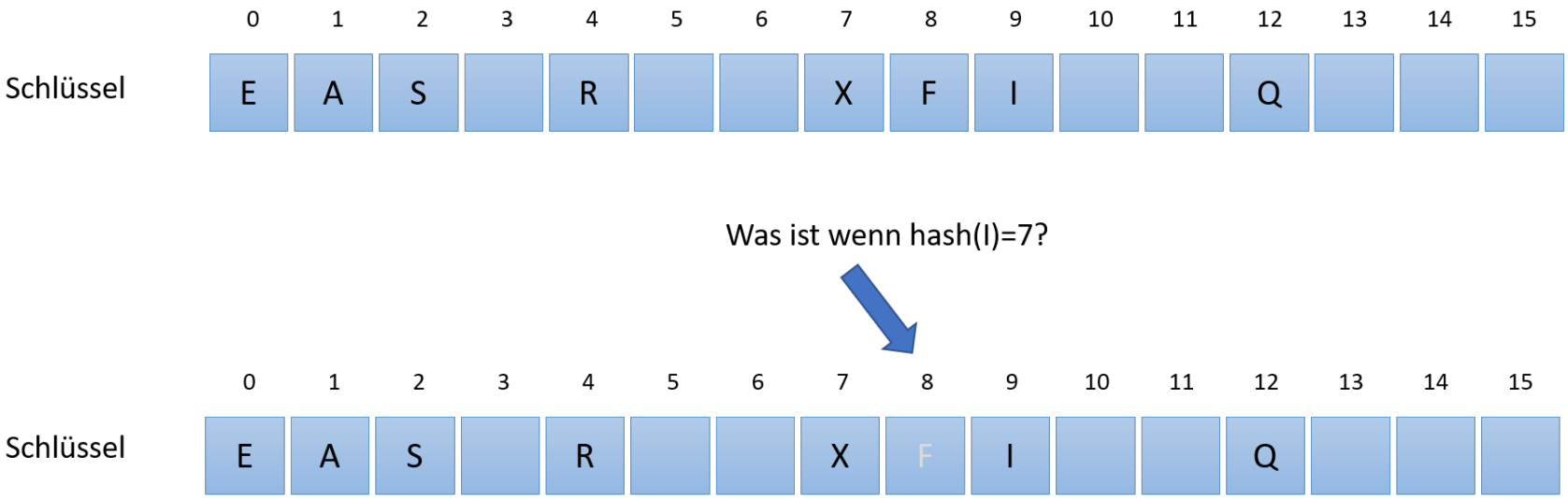
Suche: Suche an Index i

- Falls nicht leer, aber Eintrag ! = gesuchter Schlüssel, suche an Position $i + 1, i + 2$, etc.



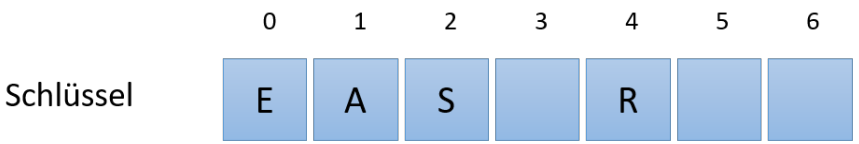
Lineare Sondierung: Elemente Löschen

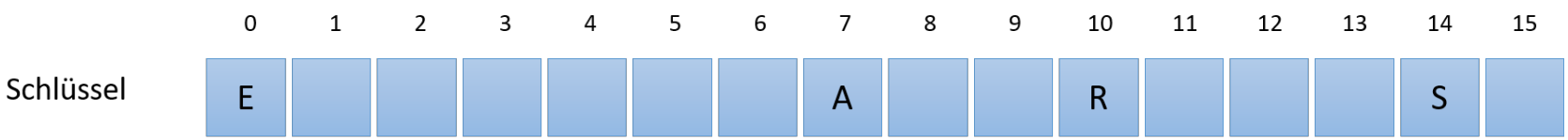
- Wenn erstes Element in Cluster gelöscht wird, müssen Nachfolger gelöscht werden.



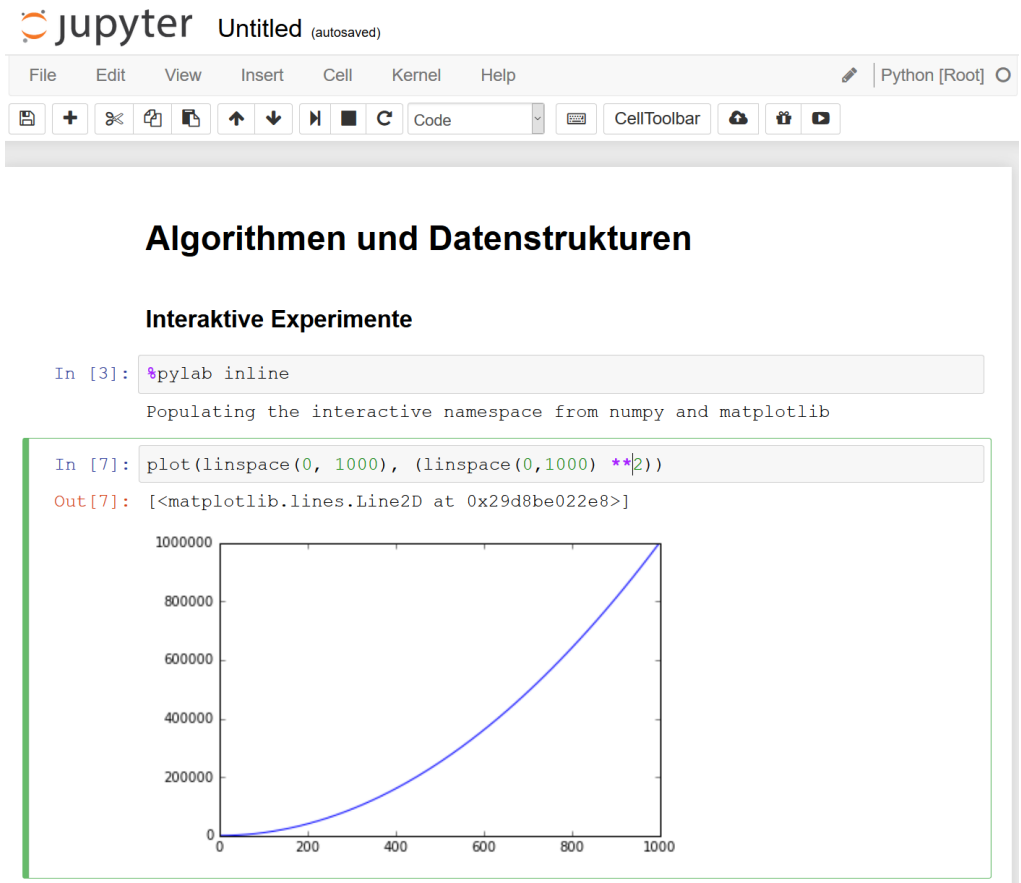
Lineare Sondierung: Grössenanpassung

- Ziel: Länge $N/M \leq 1/2$
- Alle Elemente müssen neu gehashed werden.





Implementation und Beispielanwendung



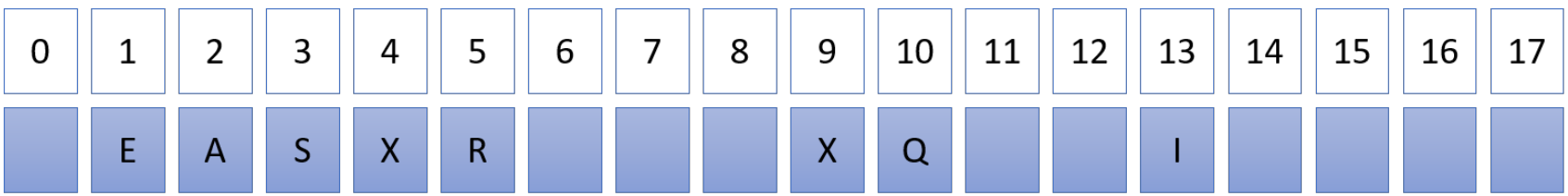
IPython Notebooks: Hashtables.ipynb

Clustering

Beobachtung

Lineares Sondieren führt zu Clusterbildung.

- Bei Kollision wächst ein Cluster, da das Element am Ende eingefügt wird.

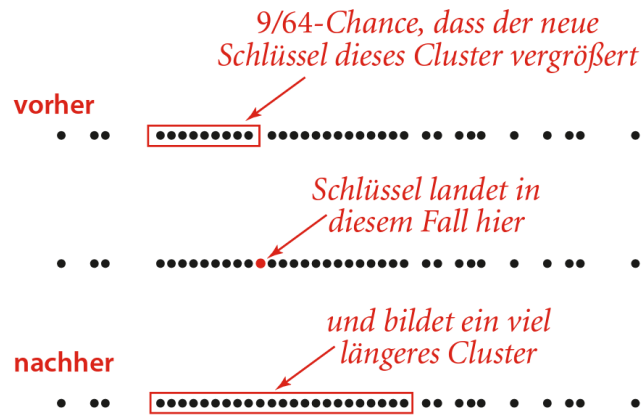


Clustering

Beobachtung

Lange Cluster wachsen schneller als kurze.

- Wahrscheinlichkeit in einem grossen Cluster zu landen ist grösser.



Quelle: Abb. 3.60, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Clustering

Beobachtung

Laufzeit der Suche hängt von Länge der Cluster ab.

Theorem

In einer auf linearer Sondierung basierenden Hashtabelle mit einer Liste der Grösse M und $N = \alpha M$ Schlüsseln ist die erforderliche durchschnittliche Anzahl von Sondierungen für erfolgreiches beziehungsweise erfolgloses Suchen

$$\sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right) \quad \textit{und} \quad \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$$

Komplexität

	Worst-case			Average-case		
Implementation	suchen	einfügen	löschen	suchen (hit)	einfügen	löschen
Verkettete Liste	N	N	N	N/2	N	N/2
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	N	$\log_2(N)$	$N/2$	N
BST	N	N	N	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\sqrt{N}$
Rot-Schwarz Bäume	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$
Hashtabellen	N	N	N	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$

Diskussion

Wann sollen wir welche Art von Datenstruktur verwenden?

implementation	guarantee			average case			ordered ops?	key interface
	search	insert	delete	search hit	insert	delete		
sequential search (unordered list)	N	N	N	$\frac{1}{2} N$	N	$\frac{1}{2} N$		`equals()`
binary search (ordered array)	$\lg N$	N	N	$\lg N$	$\frac{1}{2} N$	$\frac{1}{2} N$	✔	`compareTo()`
BST	N	N	N	$1.39 \lg N$	$1.39 \lg N$	$\sqrt{N}$	✔	`compareTo()`
red-black BST	$2 \lg N$	$2 \lg N$	$2 \lg N$	$1.0 \lg N$	$1.0 \lg N$	$1.0 \lg N$	✔	`compareTo()`
separate chaining	N	N	N	3-5 *	3-5 *	3-5 *		`equals()` `hashCode()`
linear probing	N	N	N	3-5 *	3-5 *	3-5 *		`equals()` `hashCode()`

Abbildung: Sedgewick & Wayne, Tabelle 3.15