

Algorithmen und Datenstrukturen

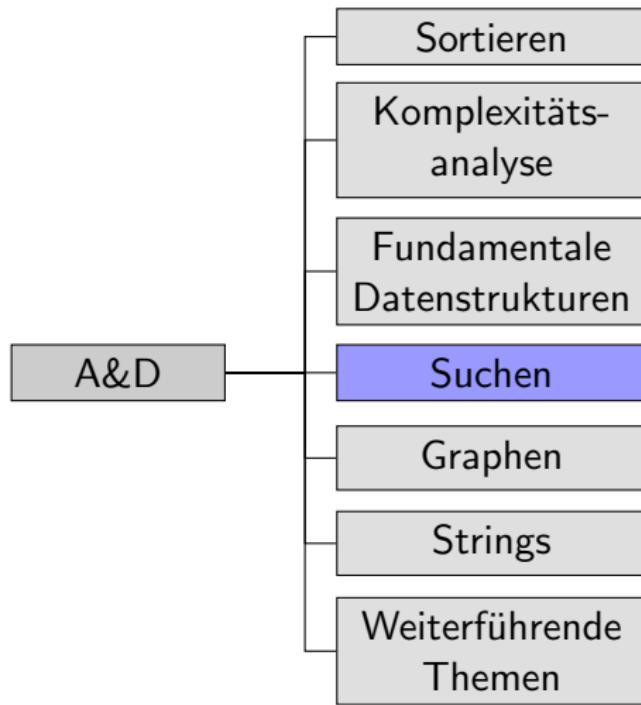
B6. Symboltabellen

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

Einführung

Übersicht



Übersicht über nächsten Vorlesungen

Thema: Symboltabellen

- Einführung und einfache Implementationen (Diese Woche)
 - Binäre Suchbäume (Diese Woche)
 - 2-3-Bäume und Rot-Schwarz Bäume (Nächste Woche)
 - Hashtabellen (Nächste Woche)

Symboltabellen

Symboltabellen

Abstraktion für Schlüssel/Werte Paar

Grundlegende Operationen

- Speichere Schlüssel mit dazugehörendem Wert.
- Suche zu Schlüssel gehörenden Wert.
- Schlüssel und Wert löschen.

Beispiel: DNS

- Einfügen von Domainname (Schlüssel) mit gegebener IP Adresse (Wert)
- Gegeben Domainname, finde IP Adresse

Domainname	IP Adresse
informatik.cs.unibas.ch	131.152.227.35
www.unibas.ch	131.152.228.33
www.cs.princeton.edu	128.112.136.11
www.fsf.org	208.118.235.174

Andere Beispiele

Anwendung	Zweck der Suche	Schlüssel	Wert
Wörterbuch	Definition finden	Wort	Definition
Websuche	Finde Webseite	Suchbegriff	Liste von Webseiten
Compiler	Eigenschaften von Variablen	Variablenname	Typ / Wert
Dateisystem	Finde Datei auf Disk	Dateiname	Ort auf Disk
Log	Finde Events	Timestamp	Logeintrag

Annahmen

- Jeder Schlüssel ist eindeutig.
 - Werte mit gleichem Schlüssel werden ersetzt.
- Schlüssel sind vergleichbar.
- Schlüsselgleichheit (Equality) ist definiert.
- Schlüssel sollen nicht mutierbar sein.

- Entspricht verallgemeinerung von Array (mit Schlüssel \neq Index).
- Wird als **Assoziatives Array** bezeichnet.

Umsetzung in Programmiersprachen

Symboltabelle werden auch als [Map](#), [Assoziatives Array](#) oder [Dictionary](#) bezeichnet.

In Java: Teil der Standardbibliothek

- `AbstractMap` mit Subklassen `HashMap` und `TreeMap`

```
Map<String, Integer> st = new TreeMap<>();  
st.put("aKey", 42);  
st.put("anotherKey", 17)  
Integer value = st.get("aKey");
```

In Python: Teil der Sprache:

```
st = {"aKey" : 42, "anotherKey" : 17}  
value = st["aKey"]
```

Symboltabellen: API

```
class ST[Key, Value]:  
  
    def put(key : Key, value : Value) -> None  
    def get(key : Key) -> Value  
    def contains(key : Key) -> Boolean  
    def delete(key : Key) -> None  
    def isEmpty() -> Boolean  
    def size() -> Int  
    def keys() : Iterator[Key]
```

Geordnete Symboltabellen: API

	<i>Schlüssel</i>	<i>Werte</i>
min()	→ 09:00:00	Chicago
	09:00:03	Phoenix
	09:00:13	Houston
get(09:00:13)	→ 09:00:59	Chicago
	09:01:10	Houston
floor(09:05:00)	→ 09:03:13	Chicago
	09:10:11	Seattle
select(7)	→ 09:10:25	Seattle
	09:14:25	Phoenix
	09:19:32	Chicago
	09:19:46	Chicago
keys(09:15:00, 09:25:00)	→ 09:21:05	Chicago
	09:22:43	Seattle
	09:22:54	Seattle
	09:25:52	Chicago
ceiling(09:30:00)	→ 09:35:21	Chicago
	09:36:14	Seattle
max()	→ 09:37:44	Phoenix
size(09:15:00, 09:25:00)	ist 5	
rank(09:10:25)	ist 7	

Quelle: Abbildung 3.1, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Geordnete Symboltabellen: API

- Wenn die Schlüssel geordnet werden können, lassen sich viele weitere Operationen definieren:

```
class ST[Key, Value]:  
    ...  
    def min() -> Key  
    def max() -> Key  
  
    def floor(key : Key) -> Key  
    def ceiling(key : Key) -> Key  
  
    def rank(key : Key) : Int  
    def select(k : Int) -> None  
  
    def deleteMin() -> None  
    def deleteMax() -> None  
  
    def size(lo : Key, hi : Key) -> Int  
  
    def keys() : Iterator[Key]  
    def keys(lo : Key, hi : Key) -> Iterator[Key]
```

Warnung: Gleichheit von Objekten

- Zwei Arten von Gleichheit in OO Sprachen:

Referenzgleichheit (`==`) Referenzen sind gleich
(gleiches Objekt)

Objektgleichheit (`equals`) Inhalt ist gleich

Achtung!

Implementation von benutzerdefinierten Klassen in Java und Python vergleicht per Default nur Objekt-Id und nicht Inhalt.

- Methoden `equals` (Java) und `__eq__` (Python) müssen implementiert werden.

Einfache Implementationen

Standard Testbeispiel

Bilde eine Symboltabelle bei der der i -te Input mit dem Wert i assoziiert ist

Input:

Schlüssel	S	E	A	R	C	H	E	X	A	M	P	L	E
Werte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Symboltabelle:

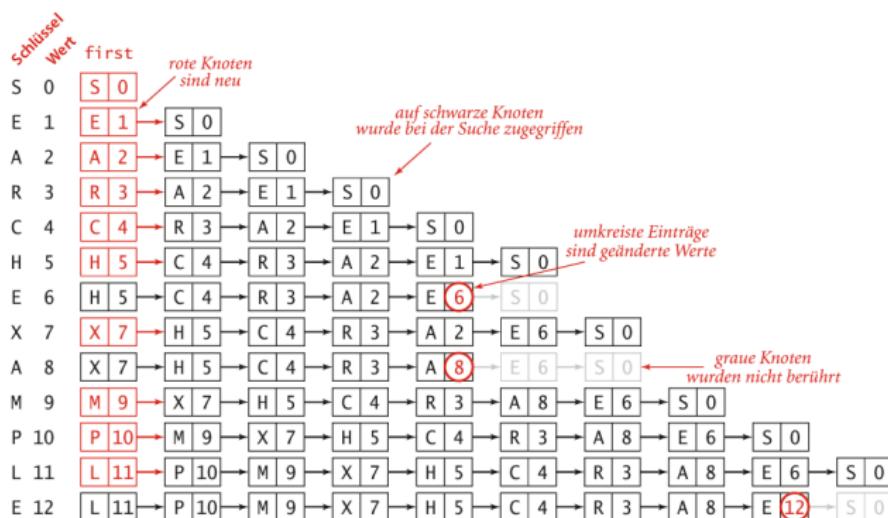
Schlüssel	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
Werte	8	4	12	5	11	9	10	3	0	7

Einfache Implementation 1

Datenstruktur Verkettete Liste von Schlüssel/Werte-Paaren

Suchen Elemente durchlaufen bis gefunden oder Listenende

Einfügen Element in Liste? Wert ändern. Ansonsten: Am Anfang einfügen.



Intermezzo: Binary search

- Klassischer Algorithmus zum Suchen in geordnetem Array
 - Vergleiche Element mit mittlerem Element des Arrays
 - Wiederhole in Teilarray, bis Element gefunden oder Teilarray leer.

keys[]												
lo	hi	mid	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>erfolgreiche Suche nach P</i>												
0	9	4	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
5	9	7	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
5	6	5	A	C	E	H	L	M	P	R	S	Y
6	6	6	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
<i>erfolglose Suche nach Q</i>												
0	9	4	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
5	9	7	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
5	6	5	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
7	6	6	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X

Schwarze Einträge sind $a[lo..hi]$

roter Eintrag ist $a[mid]$

Schleife beendet bei $keys[mid] = P$: liefert 6 zurück

Schleife beendet bei $lo > hi$: liefert 7 zurück

```
def binarysearch(a, value):
    lo, hi = 0, len(a) - 1
    while lo <= hi:
        mid = (lo + hi) // 2
        if a[mid] < value:
            lo = mid + 1
        elif value < a[mid]:
            hi = mid - 1
        else:
            return mid
    return None
```

Quelle: Abbildung 1.9, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Die Rank Funktion

- Gibt Anzahl Elemente zurück die kleiner als Schlüssel sind
 - Entspricht genau Index in Array

erfolgreiche Suche nach P												
keys[]												
lo	hi	mid	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9	4	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
5	9	7	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
5	6	5	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
6	6	6	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X

Schwarze Einträge sind $a[lo..hi]$

roter Eintrag ist $a[mid]$

erfolglose Suche nach Q												
lo	hi	mid	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9	4	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
5	9	7	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
5	6	5	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
7	6	6	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X

Schleife beendet bei $keys[mid] = P$: liefert 6 zurück

Schleife beendet bei $lo > hi$: liefert 7 zurück

Quelle: Abbildung 3.6, Algorithmen
Wayne & Sedgewick

```
def _rank(a, value):
    lo = 0
    hi = len(a) - 1
    while lo <= hi:
        mid = (lo + hi) // 2
        if a[mid] < value:
            lo = mid + 1
        elif value < a[mid]:
            hi = mid - 1
        else:
            return mid
    return lo
```

Einfache Implementation 2

Datenstruktur Geordnetes Array von Schlüssel/Werte-Paaren

Hilfsfunktion `rank` Anzahl Elemente < k (index in Array)

Operationen:

`get`: Nutze `rank` um direkt auf richtiges Element zuzugreifen.

- Teste ob wirklich richtiges Element an dieser Stelle ist

`put`: Nutze `rank` um Stelle zu finden wo eingefügt/ersetzt werden muss.

Details: Jupyter Notebook: `Symboltable.ipynb`

Komplexität

Implementation	Worst-case		Average-case	
	suchen	einfügen	suchen	einfügen
Verkettete Liste	N	N	N/2	N
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	$\log_2(N)$	N/2

Geordnete Symboltabellen: Komplexität

	Verkettete Liste	Binärsuche
suche	$O(N)$	$O(\log N)$
einfügen / löschen	$O(N)$	$O(N)$
min / max	$O(N)$	$O(1)$
floor / ceiling	$O(N)$	$\log(N)$
rank	$O(N)$	$O(\log(N))$
select	$O(N)$	$O(1)$
iteration (geordnet)	$N \log(N)$	N

Implementation

jupyter Untitled [autosaved]

File Edit View Insert Cell Kernel Help

Code CellToolbar

Algorithmen und Datenstrukturen

Interaktive Experimente

```
In [3]: %pylab inline
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

```
In [7]: plot(linspace(0, 1000), (linspace(0,1000) **2))
Out[7]: [
```

- Ausführliche Diskussion und Implementation
Jupyter-Notebook: Symboltable-ordered.ipynb

Binäre Suchbäume

Binäre Suchbäume

Ein Binärer Suchbaum ist ein **Binärbaum** mit symmetrischer Ordnung

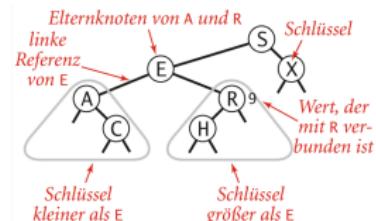
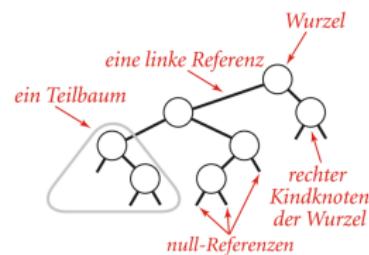
Ein Binärbaum ist

- der leere Baum, oder
- eine Wurzel mit einem linken und einem rechten Unterbaum

Symmetrische Ordnung

Der Schlüssel jedes Knotens ist

- grösser als alle Schlüssel im linken Teilbaum
- kleiner als alle Schlüssel im rechten Teilbaum



Quelle: Abb. 3.8 / 3.9, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Implementation

```
class Node[Key, Value]:  
  
    # Auf Key muss Ordnungsrelation  
    # definiert sein  
  
    Node(key : Key, value : Value)  
  
    key : Key  
    value : Value  
    left : Node[Key, Value]  
    right : Node[Key, Value]
```

- Implementation Symboltabelle: Referenz zu Wurzel Knoten

Repräsentation in Code (mit Zähler)

- Attribute Count zählt die Anzahl Knoten im Unterbaum
- Erlaubt effiziente Implementation von Operation size
 - Kein Traversieren vom Baum nötig.

```
class Node[Key, Value]:  
  
    # Auf Key muss Ordnungsrelation  
    # definiert sein  
  
    Node(key : Key, value : Value)  
  
    key : Key  
    value : Value  
    left : Node[Key, Value]  
    right : Node[Key, Value]  
    count : Int
```

Suche in Binärbaum

- Um `get` zu implementieren, müssen wir effizient suchen können.

Suche nach Schlüssel k : Prinzip:

Fall 1: $k <$ Schlüssel in Knoten

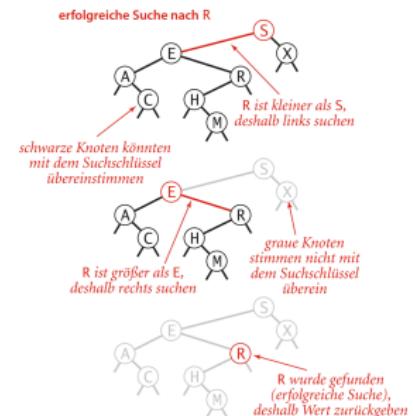
- ### ■ Gehe nach links

Fall 2: $k >$ Schlüssel in Knoten

- Gehe nach rechts

Fall 3: k = Schlüssel in Knoten

- ## ■ Gefunden



Quelle: Abb. 3.11, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Suche in Binärbaum

- Um `get` zu implementieren, müssen wir effizient suchen können.

Suche nach Schlüssel k : Prinzip:

Fall 1: $k <$ Schlüssel in Knoten

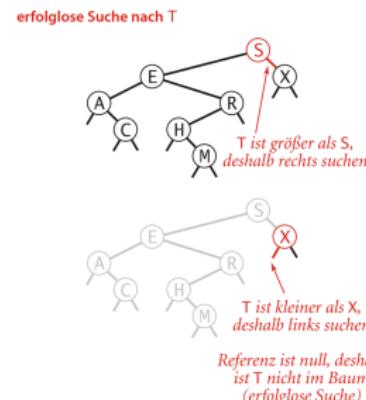
- Gehe nach links

Fall 2: $k >$ Schlüssel in Knoten

- Gehe nach rechts

Fall 3: $k =$ Schlüssel in Knoten

- Gefunden



Quelle: Abb. 3.11, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Suche in Binärbaum

- Die Suche, ausgehend von Knoten `root` kann einfach rekursiv implementiert werden.
 - Suche wird einfach in "richtigem" Teilbaum fortgesetzt.

```
def get(key, root):  
    if root == None:  
        return None  
    elif key < root.key:  
        return get(key, root.left)  
    elif key > root.key:  
        return get(key, root.right)  
    elif key == root.key:  
        return root.value
```

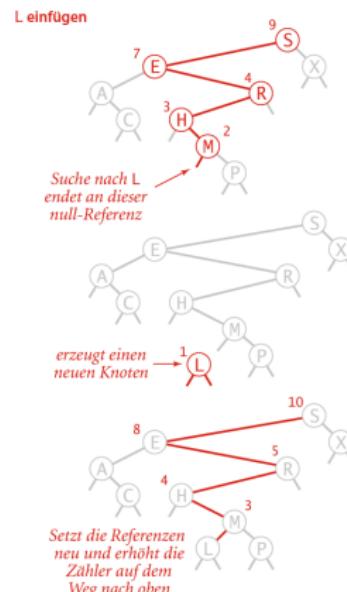
Einfügen in Binärbaum

- `put` lässt sich fast so einfach wie `get` implementieren.

Suche nach Schlüssel.

Zwei Fälle:

- Schlüssel gefunden → Wert neu setzen
- Schlüssel nicht in Baum → Neuen Knoten hinzufügen.



Quelle: Abb. 3.12, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Einfügen in Binärbaum

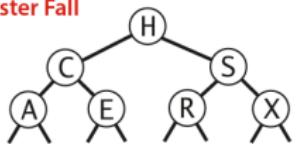
- Die Operation `put` ausgehen von Knoten `root` kann einfach rekursiv implementiert werden.
 - Auf dem "Rückweg" wird der Zähler für die Anzahl Knoten im Unterbaum aktualisiert.
- Beachte: Teilbaum wird in jeder Rekursion neu gesetzt.

```
def put(key, value, root):  
    if (root == None):  
        return Node(key, value, count = 1)  
    elif key < root.key:  
        root.left = put(key, value, root.left)  
    elif key > root.key:  
        root.right = put(key, value, root.right)  
    elif key == root.key:  
        root.value = value  
    root.count = 1 + size(root.left) + size(root.right)  
    return root
```

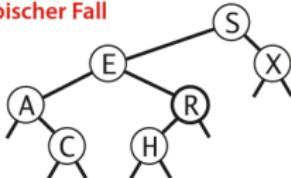
Ausprägung des Binärbaums

- Selbe Menge von Schlüsseln führt zu verschiedene Bäumen
 - hängt von Einfügereihenfolge ab.

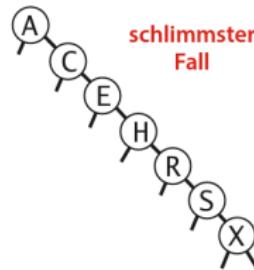
bester Fall



typischer Fall



schlimmster Fall



Quelle: Abb. 3.14, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Geordnete Symboltabellen: API

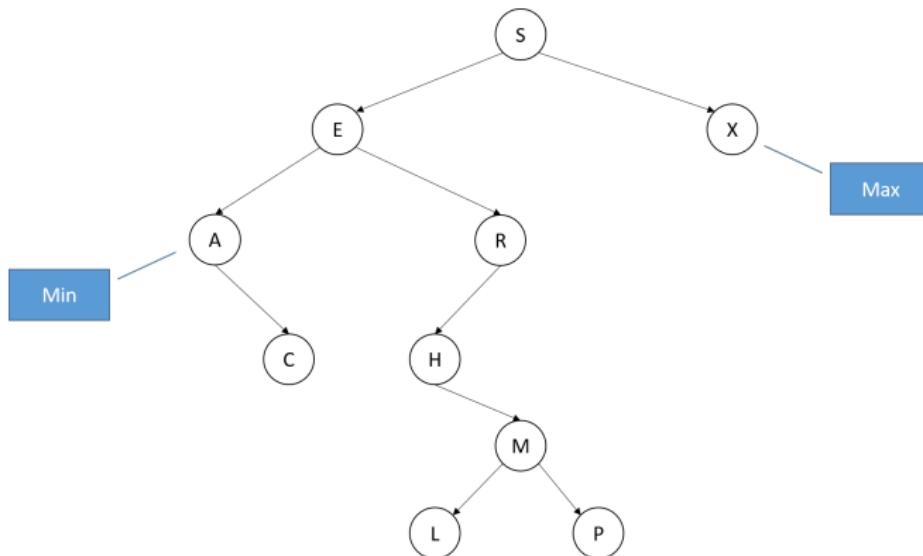
	<i>Schlüssel</i>	<i>Werte</i>
min()	→ 09:00:00	Chicago
	09:00:03	Phoenix
	09:00:13	Houston
get(09:00:13)	→ 09:00:59	Chicago
	09:01:10	Houston
floor(09:05:00)	→ 09:03:13	Chicago
	09:10:11	Seattle
select(7)	→ 09:10:25	Seattle
	09:14:25	Phoenix
	09:19:32	Chicago
	09:19:46	Chicago
keys(09:15:00, 09:25:00)	→ 09:21:05	Chicago
	09:22:43	Seattle
	09:22:54	Seattle
	09:25:52	Chicago
ceiling(09:30:00)	→ 09:35:21	Chicago
	09:36:14	Seattle
max()	→ 09:37:44	Phoenix
size(09:15:00, 09:25:00) ist 5		
rank(09:10:25) ist 7		

Quelle: Abbildung 3.1, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Quiz: Minimum und Maximum

Minimum Kleinster Schlüssel in Symboltabelle

Maximum Grösster Schlüssel in Symboltabelle

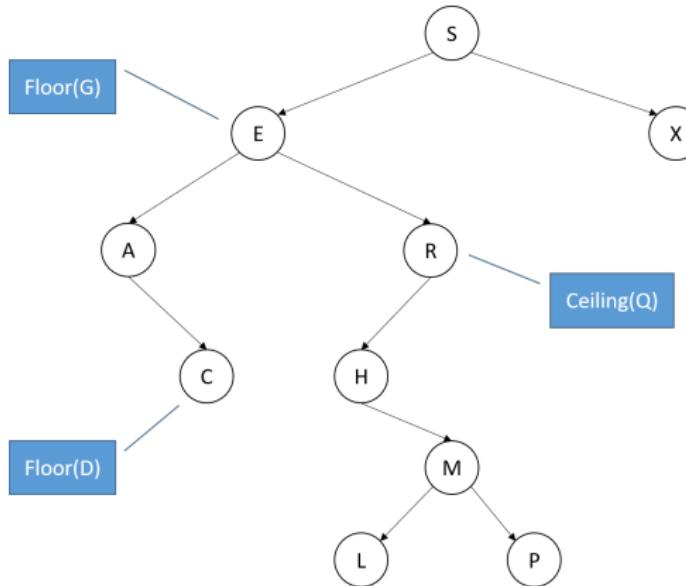


- Wie finden wir Minimum und Maximum?

Quiz: Floor und Ceiling

Floor Grösster Schlüssel \leq gegebener Schlüssel

Ceiling Kleinster Schlüssel \geq gegebener Schlüssel



- Wie finden wir Floor und Ceiling?

Ordnungsbasierte Operationen

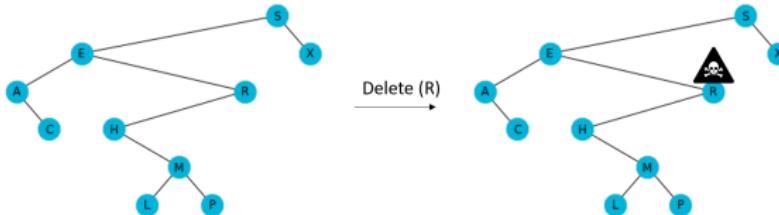
The screenshot shows a Jupyter Notebook interface. The title bar says "jupyter Untitled [autosaved]". The menu bar includes File, Edit, View, Insert, Cell, Kernel, Help, and a Python [Root] kernel selector. Below the menu is a toolbar with various icons. The main area has a title "Algorithmen und Datenstrukturen" and a subtitle "Interaktive Experimente". In cell [3], the command `%pylab inline` is run, followed by the message "Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib". In cell [7], the command `plot(linspace(0, 1000), (linspace(0,1000) **2))` is run, resulting in the output `[<matplotlib.lines.Line2D at 0x29d0be022e0>]`. A green box highlights the plot output, which is a blue curve representing the function $y = x^2$ for $x \in [0, 1000]$.

- Ordnungsbasierten Operationen sind einfach zu implementieren.
- Ausführliche Diskussion und Implementation Jupyter-Notebook: `BinarySearchTrees.ipynb`

Löschen von Knoten: Einfache Methode

Einfachste Methode zum Löschen: Tombstone

- Finde Knoten
- Markiere diesen als gelöscht (z.B. indem Wert auf null gesetzt wird).
 - Schlüssel bleibt im Baum



Problem: Speicherverschwendungen bei vielen gelöschten Elementen.

Löschen von minimalem Key

- Nach Links bis linker Knoten null ist
- Diesen Knoten durch rechten Knoten ersetzen
- Knotenzähler count aktualisieren.

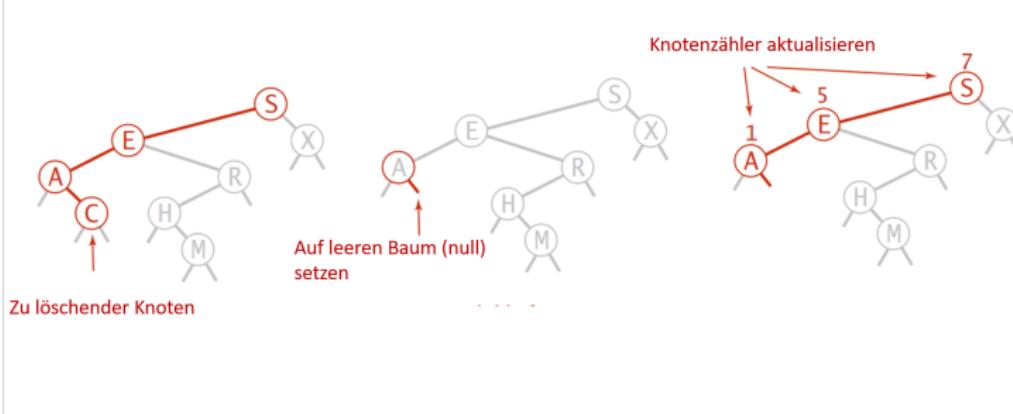
```
def deleteMin(root):  
    if root.left == None:  
        return root.right  
    else:  
        root.left = deleteMin(x.left);  
        root.count = 1 + size(root.left) + size(root.right);  
    return root
```



Löschen nach Hibbard

- Knoten t mit zu löschendem Schlüssel suchen.

Fall 1: Keine Kinder

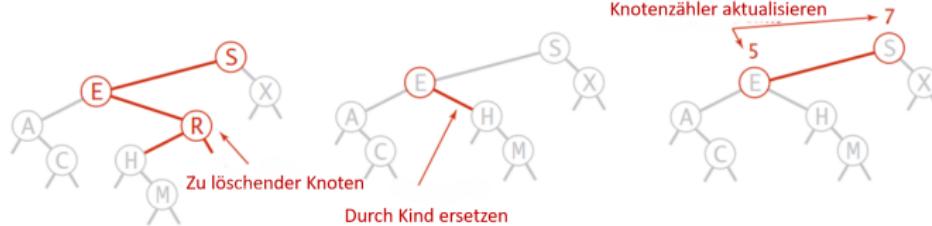


- Parent von t auf leeren Baum (null) setzen.
- Knotenzähler count aktualisieren.

Löschen nach Hibbard

- Knoten t mit zu löschendem Schlüssel suchen.

Fall 2: 1 Kind

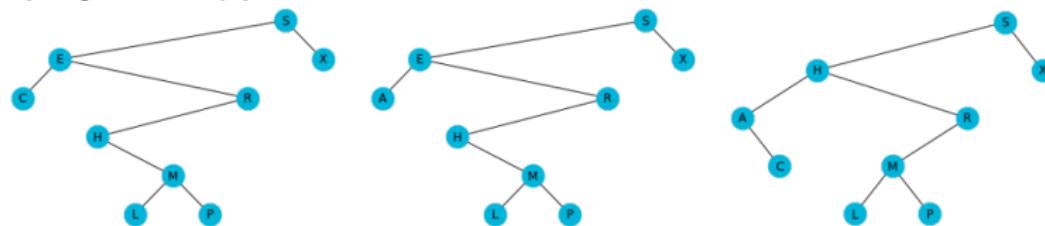


- Parent von t neu setzen
- Knotenzähler count aktualisieren.

Löschen nach Hibbard

- Knoten t mit zu löschendem Schlüssel suchen.

Fall 3: 2 Kinder



- Kleinster Knoten x im rechten Unterbaum von t suchen
- Kleinster Knoten im Unterbaum löschen (deleteMin)
- x anstelle von t setzen
- Knotenzähler count aktualisieren.

Löschen nach Hibbard: Probleme

- Warum wird durch Nachfolger und nicht Vorgänger ersetzt?
- Entscheidung willkürlich und unsymmetrisch.
- Konsequenz: Bäume nicht zufällig \Rightarrow Performanceeinbussen
 - Praxis: Manchmal Vorgänger und manchmal Nachfolger verwenden.

Offenes Problem!

Elegante und effiziente Lösung für Löschen in Binärbaum.

Komplexität

Implementation	Worst-case			Average-case		
	suchen	einfügen	löschen	suchen (hit)	einfügen	löschen
Verkettete Liste	N	N	N	N/2	N	N/2
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	N	$\log_2(N)$	$N/2$	N
Binärer Suchbaum	N	N	N	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	\sqrt{N}

Implementation

jupyter Untitled (autosaved)

File Edit View Insert Cell Kernel Help

In [3]: %pylab inline

Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib

In [7]: plot(linspace(0, 1000), (linspace(0,1000) *%[2])
Out[7]: [

Jupyter-Notebook: BinarySearchTrees.ipynb