Algorithmen und Datenstrukturen

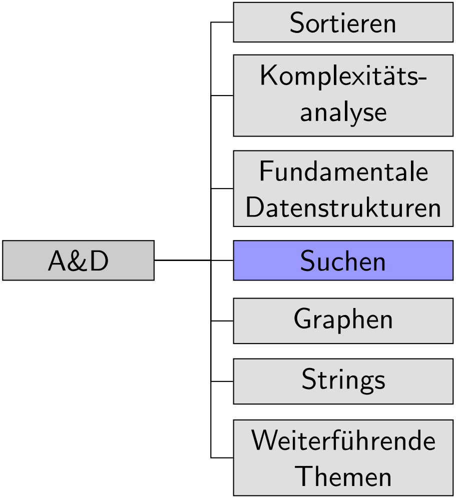
B6. Symboltabellen

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

B6.1 Einführung

Übersicht


A&D
Sortieren
Komplexitäts-analyse
Fundamentale Datenstrukturen
Suchen
Graphen
Strings
Weiterführende Themen

Übersicht über nächsten Vorlesungen

Thema: Symboltabellen

- Einführung und einfache Implementationen (Diese Woche)
- Binäre Suchbäume (Diese Woche)
- 2-3-Bäume und Rot-Schwarz Bäume (Nächste Woche)
- Hashtabellen (Nächste Woche)

B6.2 Symboltabellen

Symboltabellen

Abstraktion für Schlüssel/Werte Paar

Grundlegende Operationen

- Speichere Schlüssel mit dazugehörendem Wert.
- Suche zu Schlüssel gehörenden Wert.
- Schlüssel und Wert löschen.

Beispiel: DNS

- Einfügen von Domainname (Schlüssel) mit gegebener IP Adresse (Wert)
- Gegeben Domainname, finde IP Adresse

Domainname	IP Adresse
informatik.cs.unibas.ch	131.152.227.35
www.unibas.ch	131.152.228.33
www.cs.princeton.edu	128.112.136.11
www.fsf.org	208.118.235.174

Andere Beispiele

Anwendung	Zweck der Suche	Schlüssel	Wert
Wörterbuch	Definition finden	Wort	Definition
Websuche	Finde Webseite	Suchbegriff	Liste von Webseiten
Compiler	Eigenschaften von Variablen	Variablenname	Typ / Wert
Dateisystem	Finde Datei auf Disk	Dateiname	Ort auf Disk
Log	Finde Events	Timestamp	Logeintrag

Annahmen

- Jeder Schlüssel ist eindeutig.
  - Werte mit gleichem Schlüssel werden ersetzt.
- Schlüssel sind vergleichbar.
- Schlüsselgleichheit (Equality) ist definiert.
- Schlüssel sollen nicht mutierbar sein.

- Entspricht verallgemeinerung von Array (mit Schlüssel $\neq$ Index).
- Wird als Assoziatives Array bezeichnet.

Umsetzung in Programmiersprachen

Symboltabelle werden auch als Map, Assoziatives Array oder Dictionary bezeichnet.

In Java: Teil der Standardbibliothek

- `AbstractMap` mit Subklassen `HashMap` und `TreeMap`

```
Map<String, Integer> st = new TreeMap<>();
st.put("aKey", 42);;
st.put("anotherKey", 17)
Integer value = st.get("aKey");
```

In Python: Teil der Sprache:

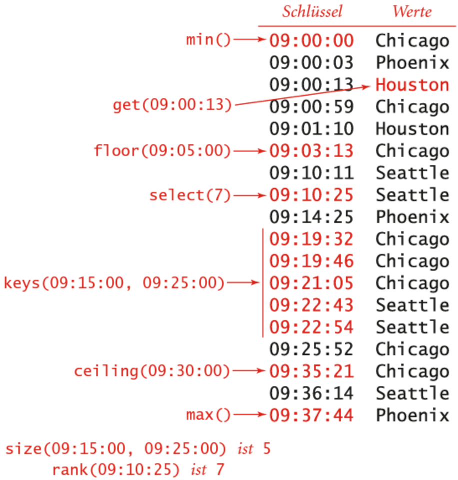
```
st = {"aKey" : 42, "anotherKey" : 17}
value = st["aKey"]
```

Symboltabellen: API

```
class ST[Key, Value]:

    def put(key : Key, value : Value) -> None
    def get(key : Key) -> Value
    def contains(key : Key) -> Boolean
    def delete(key : Key) -> None
    def isEmpty() -> Boolean
    def size() -> Int
    def keys() : Iterator[Key]
```

Geordnete Symboltabellen: API



Quelle: Abbildung 3.1, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Geordnete Symboltabellen: API

- Wenn die Schlüssel geordnet werden können, lässen sich viele weitere Operationen definieren:

```
class ST[Key, Value]:
    ...
    def min() -> Key
    def max() -> Key

    def floor(key : Key) -> Key
    def ceiling(key : Key) -> Key

    def rank(key : Key) : Int
    def select(k : Int) -> None

    def deleteMin() -> None
    def deleteMax() -> None

    def size(lo : Key, hi : Key) -> Int

    def keys() : Iterator[Key]
    def keys(lo : Key, hi : Key) -> Iterator[Key]
```

Warnung: Gleichheit von Objekten

- Zwei Arten von Gleichheit in OO Sprachen:
  Referenzgleichheit (==) `Referenzen sind gleich (gleiches Objekt)`
  Objektgleichheit (`equals`) Inhalt ist gleich

Achtung!

Implementation von benutzerdefinierten Klassen in Java und Python vergleicht per Default nur Objekt-Id und nicht Inhalt.

- Methoden `equals` (Java) und `__eq__` (Python) müssen implementiert werden.

B6.3 Einfache Implementationen

Standard Testbeispiel

Bilde eine Symboltabelle bei der der $i-$te Input mit dem Wert i assoziiert ist

Input:

Schlüssel	S	E	A	R	C	H	E	X	A	M	P	L	E
Werte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Symboltabelle:

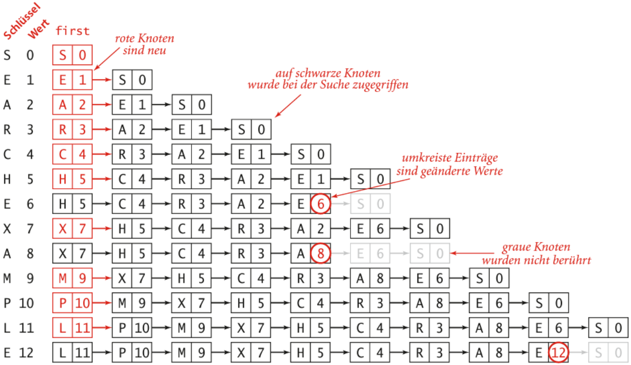
Schlüssel	A	C	E	H	L	M	P	R	S	X
Werte	8	4	12	5	11	9	10	3	0	7

Einfache Implementation 1

Datenstruktur Verkettete Liste von Schlüssel/Werte-Paaren

Suchen Elemente durchlaufen bis gefunden oder Listenende

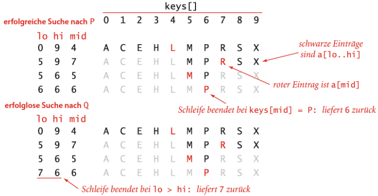
Einfügen Element in Liste? Wert ändern. Ansonsten: Am Anfang einfügen.



Quelle: Abbildung 3.3, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Intermezzo: Binary search

- Klassischer Algorithmus zum Suchen in geordnetem Array
  - Vergleiche Element mit mittlerem Element des Arrays
  - Wiederhole in Teilarray, bis Element gefunden oder Teilarray leer.

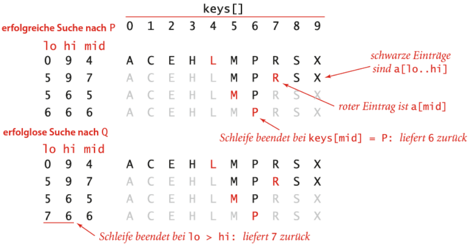


Quelle: Abbildung 1.9, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

```
def binarysearch(a, value):
  lo, hi = 0, len(a) - 1
  while lo <= hi:
    mid = (lo + hi) // 2
    if a[mid] < value:
      lo = mid + 1
    elif value < a[mid]:
      hi = mid - 1
    else:
      return mid
  return None
```

Die Rank Funktion

- Gibt Anzahl Elemente zurück die kleiner als Schlüssel sind
  - Entspricht genau Index in Array



Quelle: Abbildung 3.6, Algorithmen
Wayne & Sedgewick

```
def _rank(a, value):
  lo = 0
  hi = len(a) - 1
  while lo  <= hi:
    mid = (lo + hi) // 2
    if  a[mid] < value:
      lo = mid + 1
    elif  value  < a[mid]:
      hi = mid - 1
    else:
      return mid
  return lo
```

Einfache Implementation 2

Datenstruktur Geordnetes Array von Schlüssel/Werte-Paaren

Hilfsfunktion `rank` Anzahl Elemente $< k$ (index in Array)

Operationen:

`get`: Nutze `rank` um direkt auf richtiges Element zuzugreifen.

- Teste ob wirklich richtiges Element an dieser Stelle ist

`put`: Nutze `rank` um Stelle zu finden wo eingefügt/ersetzt werden muss.

Details: Jupyter Notebook: `Symboltable.ipynb`

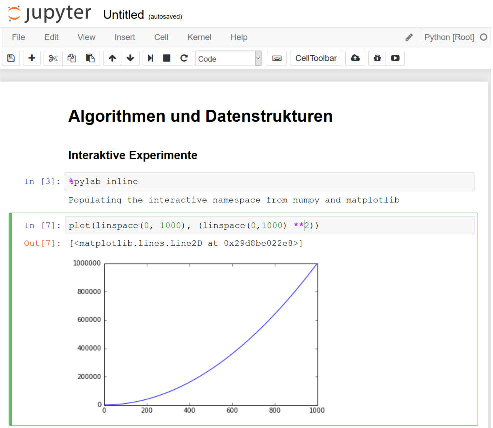
Komplexität

	Worst-case		Average-case	
Implementation	suchen	einfügen	suchen	einfügen
Verkettete Liste	N	N	N/2	N
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	$\log_2(N)$	N/2

Geordnete Symboltabellen: Komplexität

	Verkettete Liste	Binärsuche
suche	$O(N)$	$O(\log N)$
einfügen / löschen	$O(N)$	$O(N)$
min / max	$O(N)$	$O(1)$
floor /ceiling	$O(N)$	$\log(N)$
rank	$O(N)$	$O(\log(N))$
select	$O(N)$	$O(1)$
iteration (geordnet)	$N\log(N)$	N

Implementation



- Ausführliche Diskussion und Implementation Jupyter-Notebook: `Symboltable-ordered.ipynb`

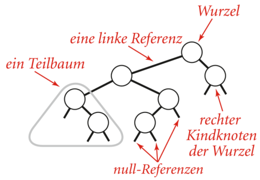
B6.4 Binäre Suchbäume

Binäre Suchbäume

Ein Binärer Suchbaum ist ein Binärbaum mit symmetrischer Ordnung

Ein Binärbaum ist

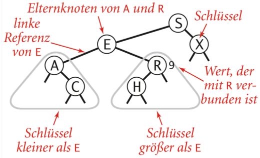
- der leere Baum, oder
- eine Wurzel mit einem linken und einem rechten Unterbaum



Symetrische Ordnung

Der Schlüssel jedes Knotens ist

- grösser als alle Schlüssel im linken Teilbaum
- kleiner als alle Schlüssel im rechten Teilbaum



Quelle: Abb. 3.8 / 3.9, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Implementation

```
class Node[Key, Value]:

    # Auf Key muss Ordnungsrelation
    # definiert sein

    Node(key : Key, value : Value)

    key : Key
    value : Value
    left : Node[Key, Value]
    right : Node[Key, Value]
```

- Implementation Symboltabelle: Referenz zu Wurzel Knoten

Repräsentation in Code (mit Zähler)

- Attribute `Count` zählt die Anzahl Knoten im Unterbaum
- Erlaubt effiziente Implementation von Operation `size`
  - Kein Traversieren vom Baum nötig.

```
class Node[Key, Value]:

    # Auf Key muss Ordnungsrelation
    # definiert sein

    Node(key : Key, value : Value)

    key : Key
    value : Value
    left : Node[Key, Value]
    right : Node[Key, Value]
    count : Int
```

Suche in Binärbaum

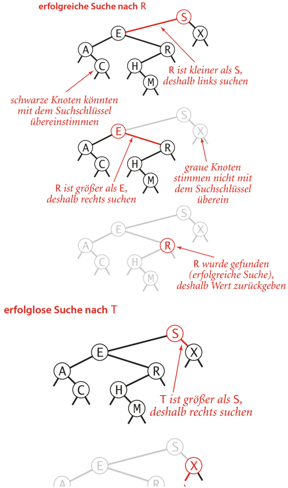
- Um get zu implementieren, müssen wir effizient suchen können.

Suche nach Schlüssel k: Prinzip:

Fall 1: $k <$ Schlüssel in Knoten
- Gehe nach links

Fall 2: $k >$ Schlüssel in Knoten
- Gehe nach rechts

Fall 3: $k =$ Schlüssel in Knoten
- Gefunden



Suche in Binärbaum

- Die Suche, ausgehend von Knoten `root` kann einfach rekursiv implementiert werden.
  - Suche wird einfach in "richtigem" Teilbaum fortgesetzt.

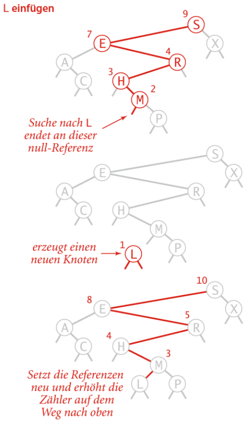
```
def get(key, root):
    if root == None:
        return None
    elif key < root.key:
        return get(key, root.left)
    elif key > root.key:
        return get(key, root.right)
    elif key == root.key:
        return root.value
```

Einfügen in Binärbaum

- put lässt sich fast so einfach wie get implementieren.

Suche nach Schlüssel.
Zwei Fälle:

- Schlüssel gefunden → Wert neu setzen
- Schlüssel nicht in Baum → Neuen Knoten hinzufügen.



Quelle: Abb. 3.12, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

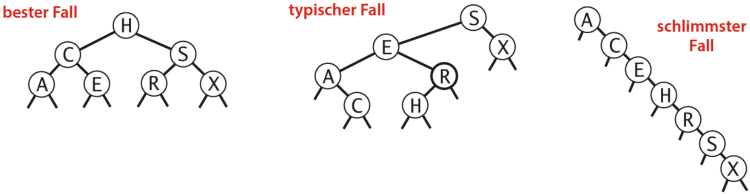
Einfügen in Binärbaum

- Die Operation put ausgehen von Knoten root kann einfach rekursiv implementiert werden.
  - Auf dem "Rückweg" wird der Zähler für die Anzahl Knoten im Unterbaum aktualisiert.
- Beachte: Teilbaum wird in jeder Rekursion neu gesetzt.

```python
def put(key, value, root):
    if (root == None):
        return Node(key, value, count = 1)
    elif key < root.key:
        root.left = put(key, value, root.left)
    elif key > root.key:
        root.right = put(key, value, root.right)
    elif key == root.key:
        root.value = value
    root.count = 1 + size(root.left) + size(root.right)
    return root
```

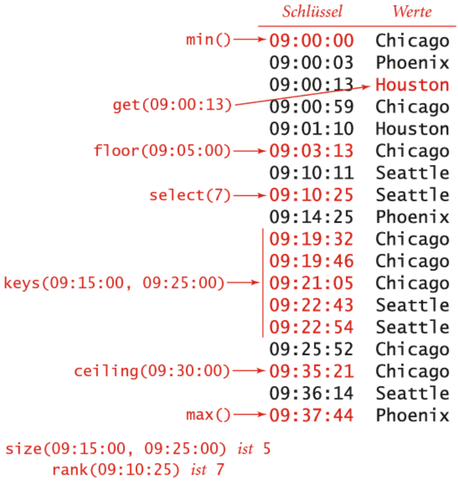
Ausprägung des Binärbaums

- Selbe Menge von Schlüsseln führt zu verschiedene Bäumen
  - hängt von Einfügereihenfolge ab.



Quelle: Abb. 3.14, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Geordnete Symboltabellen: API

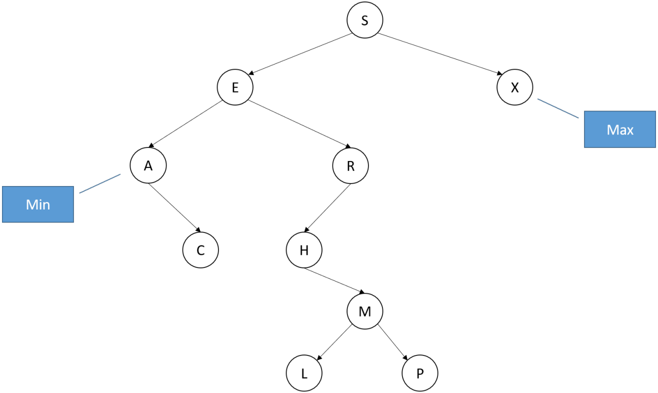


Quelle: Abbildung 3.1, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Quiz: Minimum und Maximum

Minimum Kleinster Schlüssel in Symboltabelle

Maximum Grösster Schlüssel in Symboltabelle

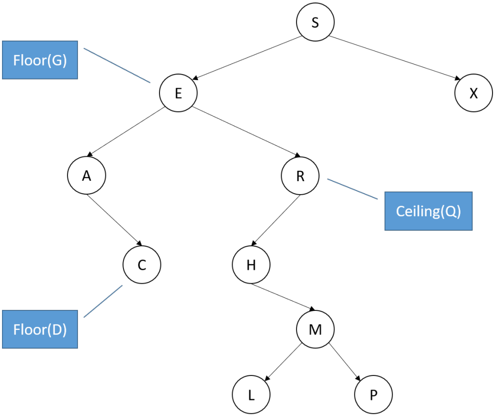


- Wie finden wir Minimum und Maximum?

Quiz: Floor und Ceiling

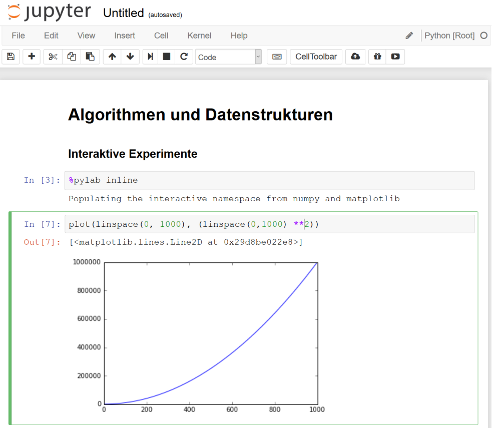
Floor Grösster Schlüssel $\leq$ gegebener Schlüssel

Ceiling Kleinster Schlüssel $\geq$ gegebener Schlüssel



- Wie finden wir Floor und Ceiling?

Ordnungsbasierte Operationen

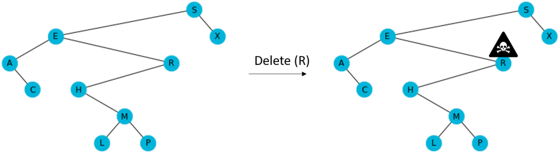


- Ordnungsbasierten Operationen sind einfach zu implementieren.
- Ausführliche Diskussion und Implementation Jupyter-Notebook: `BinarySearchTrees.ipynb`

Löschen von Knoten: Einfache Methode

Einfachste Methode zum Löschen: Tombstone

- Finde Knoten
- Markiere diesen als gelöscht (z.B. indem Wert auf `null` gesetzt wird).
  - Schlüssel bleibt im Baum

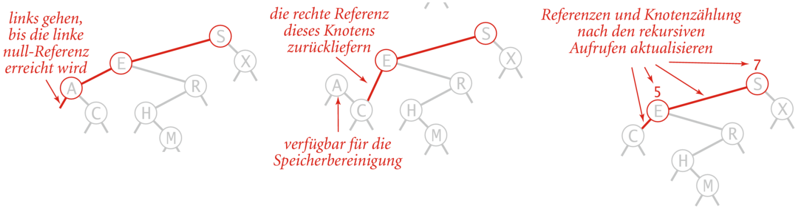


Problem: Speicherverschwendung bei vielen gelöschten Elementen.

Löschen von minimalem Key

- Nach Links bis linker Knoten null ist
- Diesen Knoten durch rechten Knoten ersetzten
- Knotenzähler count aktualisieren.

```
def deleteMin(root):
  if root.left == None:
    return root.right
  else:
    root.left = deleteMin(x.left);
    root.count = 1 + size(root.left)   + size(root.right);
    return root
```

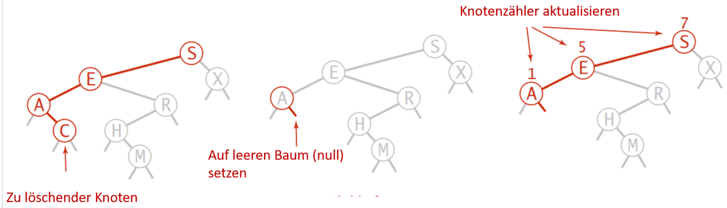


Quelle: Abb. 3.19, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Löschen nach Hibbard

- Knoten t mit zu löschendem Schlüssel suchen.

Fall 1: Keine Kinder

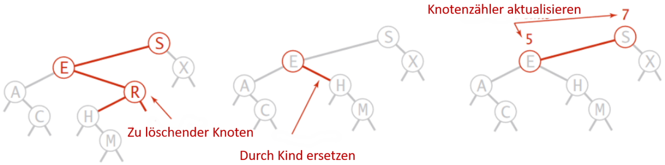


- Parent von t auf leeren Baum (null) setzen.
- Knotenzähler `count` aktualisieren.

Löschen nach Hibbard

- Knoten t mit zu löschendem Schlüssel suchen.

Fall 2: 1 Kind

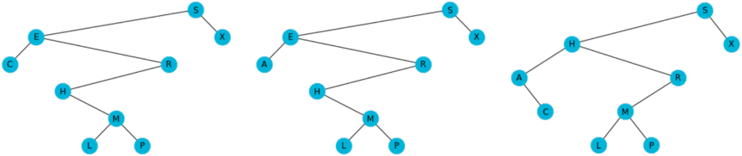


- Parent von t neu setzen
- Knotenzähler `count` aktualisieren.

Löschen nach Hibbard

- Knoten t mit zu löschendem Schlüssel suchen.

Fall 3: 2 Kinder



- Kleinster Knoten x im rechten Unterbaum von t suchen
- Kleinster Knoten im Unterbaum löschen (`deleteMin`)
- x anstelle von t setzten
- Knotenzähler `count` aktualisieren.

Löschen nach Hibbard: Probleme

- Warum wird durch Nachfolger und nicht Vorgänger ersetzt?
- Entscheidung willkürlich und unsymmetrisch.
- Konsequenz: Bäume nicht zufällig $\Rightarrow$ Performanceeinbussen
  - Praxis: Manchmal Vorgänger und manchmal Nachfolger verwenden.

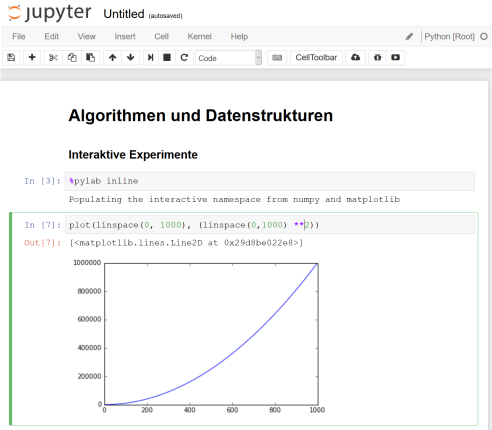
Offenes Problem!

Elegante und effiziente Lösung für Löschen in Binärbaum.

Komplexität

	Worst-case			Average-case		
Implementation	suchen	einfügen	löschen	suchen (hit)	einfügen	löschen
Verkettete Liste	N	N	N	N/2	N	N/2
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	N	$\log_2(N)$	$N/2$	N
Binärer Suchbaum	N	N	N	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\sqrt{N}$

Implementation



Jupyter-Notebook: `BinarySearchTrees.ipynb`