

Algorithmen und Datenstrukturen

B4. Bäume

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

Algorithmen und Datenstrukturen

— B4. Bäume

B4.1 Definitionen und Eigenschaften

B4.2 Traversierung

B4.3 Datenstruktur

B4.1 Definitionen und Eigenschaften

Was ist ein Baum

► Struktur um Daten hierarchisch anzuordnen.

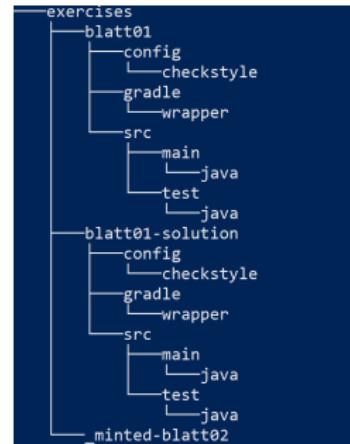
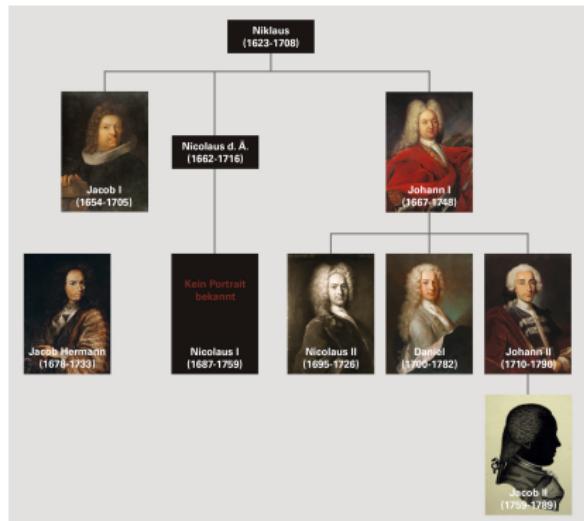


Abbildung:

<http://www.ub.unibas.ch/bernoulli/index.php/Stammbaum>

Was ist ein Baum

Rekursive Definition

Ein Baum T der Ordnung n ist

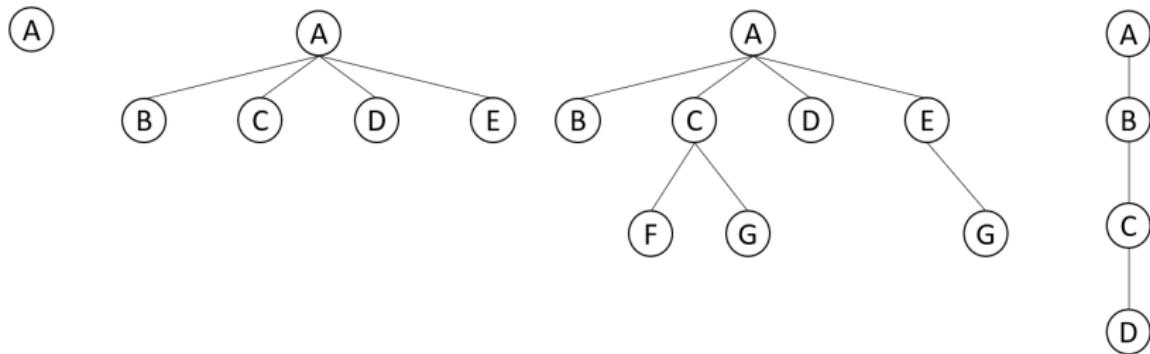
- ▶ der leere Baum,
- ▶ oder besteht aus einem Knoten (der Wurzel) sowie maximal n Bäumen (den Unterbäumen von T).

Vergleiche mit Definition von Liste:

Eine Liste L ist

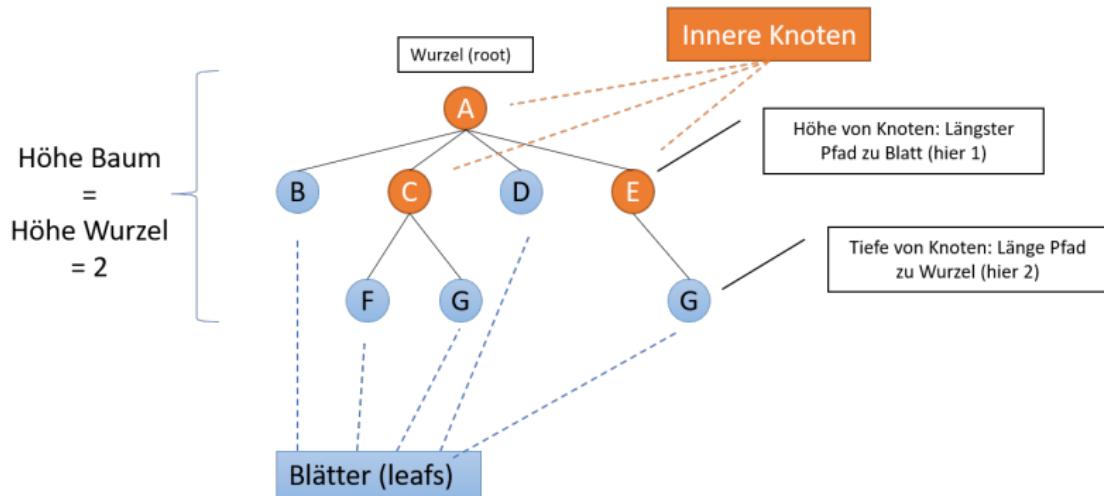
- ▶ die leere Liste
- ▶ oder ein Element H (Head) gefolgt von einer Liste.

Beispiele



Eine Liste ist ein Spezialfall eines Baumes (Baum der Ordnung 1)

Terminologie



Wichtigster Spezialfall: Binärbaum

Binärbaum (Binary Tree)

Ein Binärbaum T ist

- ▶ der leere Baum
- ▶ oder besteht aus einem Knoten (genannt Wurzel) sowie maximal 2 Binärbäumen (den Unterbäumen von T).

- ▶ Binärbäume haben jede Menge Anwendungen
- ▶ Unser aktueller Fokus



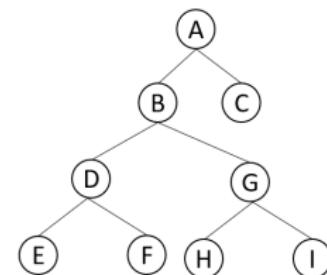
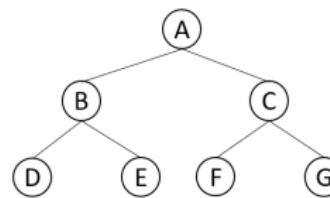
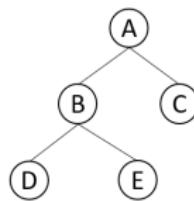
Terminologie (2)

- ▶ **Voller Binärbaum:** Jeder Knoten hat 0 oder 2 Kinder
- ▶ **Vollständiger (oder kompletter) Binärbaum:** Alle Ebenen sind vollständig gefüllt ausser evtl. die letzte Ebene wobei nur Blätter rechts fehlen dürfen.
- ▶ **Perfekter Binärbaum:** Alle internen Knoten haben genau 2 Kinder und alle Blätter sind auf der gleichen Ebene

Quiz

- ▶ Welche der folgenden Bäume sind voll, vollständig oder perfekt?
- ▶ Wie ist es mit dem leeren Baum?

(A)



Höhe eines perfekten Binärbaums

Theorem

Die Höhe eines perfekten Binärbaums der Grösse N (also mit N Knoten) ist $\log_2(N + 1) - 1$.

Beweis.

- Die Anzahl Knoten N eines perfekten Baumes der Höhe h sind $N = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1$
- Auflösen nach h ergibt
 $\log_2(N + 1) = h + 1 \Leftrightarrow h = \log_2(N + 1) - 1$



Höhe eines vollständigen Binärbaums

Theorem

Die Höhe eines vollständigen Binärbaums der Grösse N ist $\lfloor \log_2(N) \rfloor$

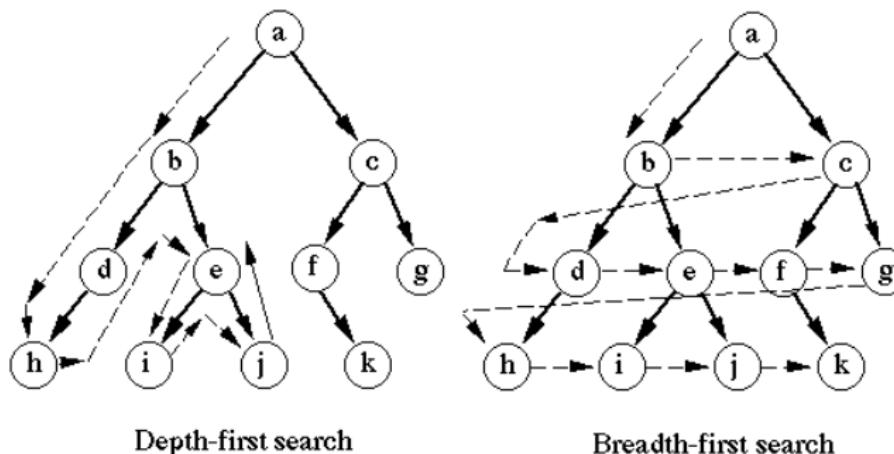
- ▶ Es stimmt für Höhe 0 (Für $N = 1$ ist $\log_2(1) = 0$)
- ▶ Die Höhe nimmt nur um 1 zu, wenn N so vergrössert wird, dass es eine Zweierpotenz wird.
 - ▶ D.h ein Knoten ist alleine auf der letzten Ebene.

B4.2 Traversierung

Traversierung

Breitenansatz (breadth-first-search). Eine Ebene nach dem anderen.

Tiefenansatz (depth-first-search). Zuerst in die Tiefe, dann links nach rechts.



Quelle: <http://www.cse.unsw.edu.au/~billw/Justsearch.htm>

Depth-first-search Traversierung

Wir unterscheiden drei Hauptarten der DFS Traversierung:

Preorder Aktueller Knoten zuerst, danach weiter traversieren

Inorder Aktueller Knoten zwischen Traversierung von
Unterbäumen

Postorder Aktueller Knoten nach Traversierung von
Unterbäumen

B4.3 Datenstruktur

Datenstruktur für Binärbaum

```
class Node[Item]:  
    item  : Item  
    left: Node[Item]  
    right: Node[Item]  
  
    # Konstruktor  
    NodeTree(item : Item, left : Node[Item], right: Node[Item])
```

Vergleiche mit verketteter Liste:

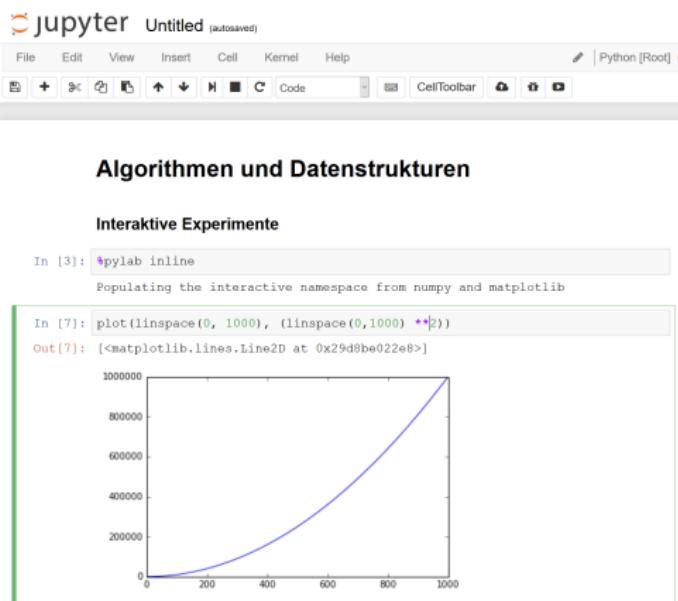
```
class Node[Item]:  
    item : Item  
    next : Node  
    Node(head : Item, next : Node[Item])  # Konstruktor
```

Rekursive Interpretation

```
class BinaryTree[Item]:  
    item  Item  
    left: BinaryTree[Item]  
    right: BinaryTree[Item]  
  
    BinaryTree(item : Item,  
              left : BinaryTree[Item],  
              right: BinaryTree[Item]  
              )
```

- ▶ Nichts Neues: Nur neue Interpretation der Knoten (als Baum)
- ▶ Nützlich in Implementation

Implementation



The screenshot shows a Jupyter Notebook interface with the title "Algorithmen und Datenstrukturen". The notebook has a toolbar at the top with various icons for file operations, cell types, and help. The main area contains an "Interactive Experimente" section. In cell [3], the command `pylab inline` is run, followed by the message "Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib". In cell [7], the command `plot(linspace(0, 1000), (linspace(0,1000) *•[2]))` is run, and the output is a plot of a parabola $y = x^2$ from 0 to 1000 on both axes. The plot area has a green border.

IPython Notebooks: Trees.ipynb