

# Algorithmen und Datenstrukturen

## B4. Bäume

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

# Algorithmen und Datenstrukturen

## — B4. Bäume

### B4.1 Definitionen und Eigenschaften

### B4.2 Traversierung

### B4.3 Datenstruktur

# B4.1 Definitionen und Eigenschaften

# Was ist ein Baum

- Struktur um Daten hierarchisch anzuordnen.

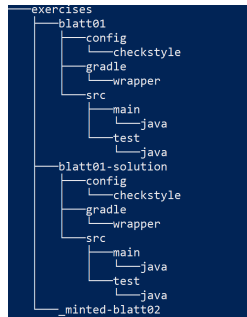
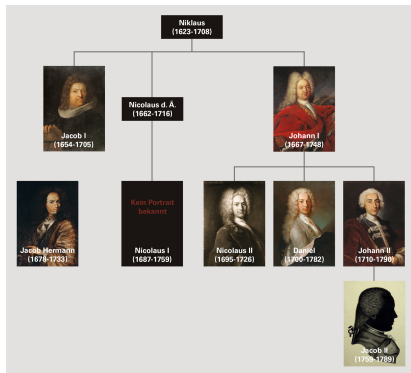


Abbildung:

<http://www.ub.unibas.ch/bernoulli/index.php/Stammbaum>

# Was ist ein Baum

## Rekursive Definition

Ein Baum  $T$  der Ordnung  $n$  ist

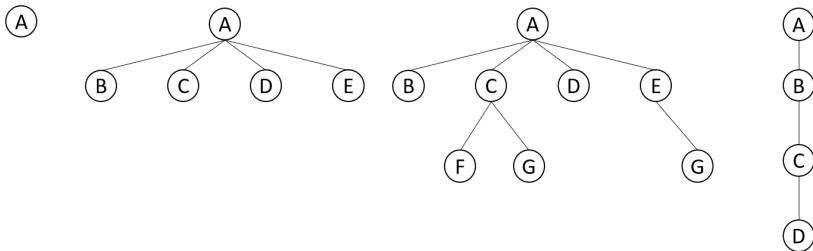
- ▶ der leere Baum,
- ▶ oder besteht aus einem Knoten (der Wurzel) sowie maximal  $n$  Bäumen (den Unterbäumen von  $T$ ).

Vergleiche mit Definition von Liste:

Eine Liste  $L$  ist

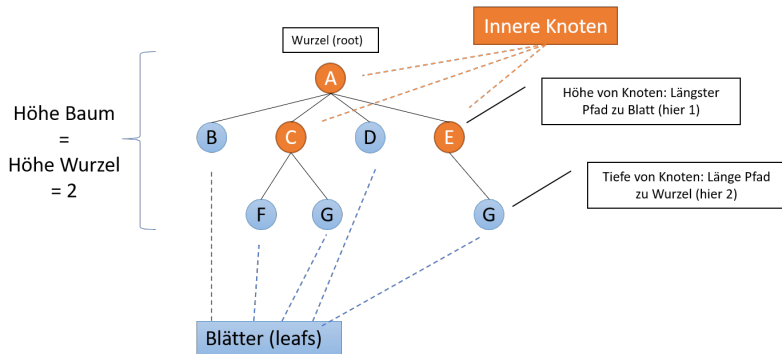
- ▶ die leere Liste
- ▶ oder ein Element  $H$  (Head) gefolgt von einer Liste.

# Beispiele



Eine Liste ist ein Spezialfall eines Baumes (Baum der Ordnung 1)

# Terminologie



# Wichtigster Spezialfall: Binärbaum

## Binärbaum (Binary Tree)

Ein Binärbaum  $T$  ist

- ▶ der leere Baum
  - ▶ oder besteht aus einem Knoten (genannt Wurzel) sowie maximal 2 Binärbäumen (den Unterbäumen von  $T$ ).
- 
- ▶ Binärbäume haben jede Menge Anwendungen
  - ▶ Unser aktueller Fokus





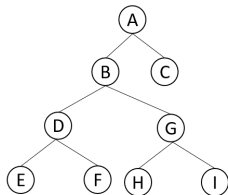
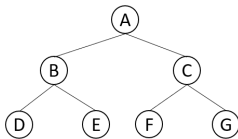
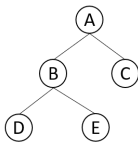
## Terminologie (2)

- ▶ **Voller Binärbaum:** Jeder Knoten hat 0 oder 2 Kinder
- ▶ **Vollständiger (oder kompletter) Binärbaum:** Alle Ebenen sind vollständig gefüllt ausser evtl. die letzte Ebene wobei nur Blätter rechts fehlen dürfen.
- ▶ **Perfekter Binärbaum:** Alle internen Knoten haben genau 2 Kinder und alle Blätter sind auf der gleichen Ebene

# Quiz

- ▶ Welche der folgenden Bäume sind voll, vollständig oder perfekt?
- ▶ Wie ist es mit dem leeren Baum?

(A)



# Höhe eines perfekten Binärbaums

## Theorem

*Die Höhe eines perfekten Binärbaums der Grösse  $N$  (also mit  $N$  Knoten) ist  $\log_2(N + 1) - 1$ .*

## Beweis.

- ▶ Die Anzahl Knoten  $N$  eines perfekten Baumes der Höhe  $h$  sind  $N = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1$
- ▶ Auflösen nach  $h$  ergibt
$$\log_2(N + 1) = h + 1 \Leftrightarrow h = \log_2(N + 1) - 1$$



# Höhe eines vollständigen Binärbaums

## Theorem

*Die Höhe eines vollständigen Binärbaums der Grösse  $N$  ist  $\lfloor \log_2(N) \rfloor$*

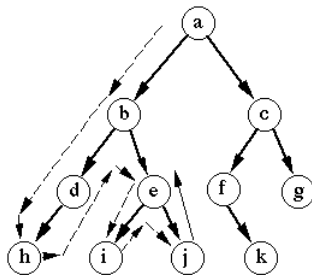
- ▶ Es stimmt für Höhe 0 (Für  $N = 1$  ist  $\log_2(1) = 0$ )
- ▶ Die Höhe nimmt nur um 1 zu, wenn  $N$  so vergrössert wird, dass es eine Zweierpotenz wird.
  - ▶ D.h ein Knoten ist alleine auf der letzten Ebene.

## B4.2 Traversierung

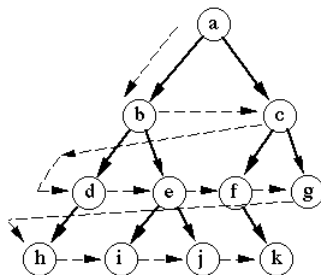
# Traversierung

**Breitenansatz** (breadth-first-search). Eine Ebene nach dem anderen.

**Tiefenansatz** (depth-first-search). Zuerst in die Tiefe, dann links nach rechts.



Depth-first search



Breadth-first search

Quelle: <http://www.cse.unsw.edu.au/~billw/Justsearch.html>

# Depth-first-search Traversierung

Wir unterscheiden drei Hauptarten der DFS Traversierung:

**Preorder** Aktueller Knoten zuerst, danach weiter traversieren

**Inorder** Aktueller Knoten zwischen Traversierung von  
Unterbäumen

**Postorder** Aktueller Knoten nach Traversierung von  
Unterbäumen

## B4.3 Datenstruktur



# Datenstruktur für Binärbaum

```
class Node[Item]:  
    item : Item  
    left: Node[Item]  
    right: Node[Item]  
  
    # Konstruktor  
    NodeTree(item : Item, left : Node[Item], right: Node[Item])
```

Vergleiche mit verketteter Liste:

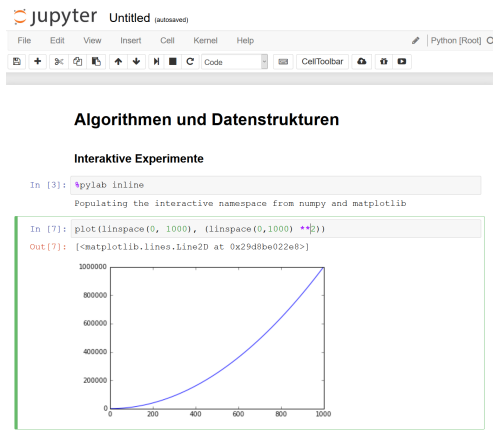
```
class Node[Item]:  
    item : Item  
    next : Node  
    Node(head : Item, next : Node[Item]) # Konstruktor
```

# Rekursive Interpretation

```
class BinaryTree[Item]:  
  item  Item  
  left: BinaryTree[Item]  
  right: BinaryTree[Item]  
  
  BinaryTree(item : Item,  
             left  : BinaryTree[Item],  
             right: BinaryTree[Item]  
             )
```

- ▶ Nichts Neues: Nur neue Interpretation der Knoten (als Baum)
- ▶ Nützlich in Implementation

# Implementation



IPython Notebooks: Trees.ipynb