Algorithmen und Datenstrukturen

B2. Arrays & Verkettete Listen

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

B2.1 Arrays

Die Datenstruktur Array (Feld)

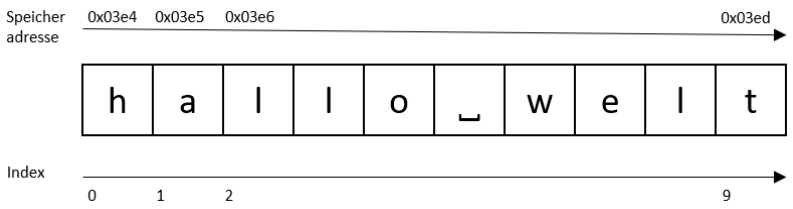
- Eine der grundlegenden Datenstrukturen, die sich in jeder Programmiersprache findet.
- Beschreibt eine Kollektion von fixer Grösse.

In Java:

```
Byte[] ia = new Byte[100];
String[] sa = new String[100];
```

Die Datenstruktur Array (Feld)

Array
Sequenz von Elementen die in gleichmässigen Abständen im Speicher angeordent sind.



Laufzeit grundlegender Operationen

- Was ist die Laufzeitkomplexität von folgenden Operationen (als Funktion der Arraygrösse n)
  - `get(i)` Element an beliebiger Stelle i lesen?
  - `set(i)` - Element an beliebiger Stelle i schreiben?
  - `length()` - Länge von Array bestimmen?
  - `find(x)` - Element x finden und Index zurückliefern?
- Was ist die Speicherkomplexität?

Beobachtung
Komplexität direkte Konsequenz aus der Datenrepräsentation

Dynamische Arrays

Fixe Grösse ist für viele Anwendungen einschränkend

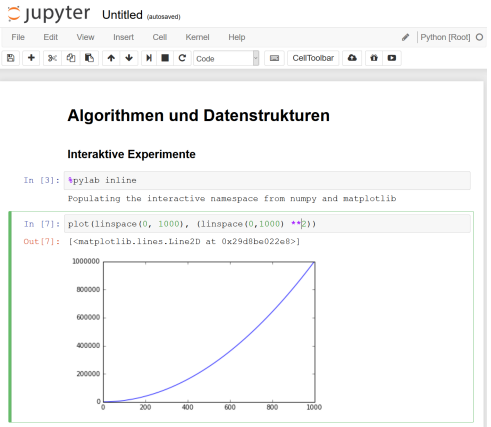
- Brauchen Arrays, die dynamisch wachsen können.
- Laufzeit Eigenschaften bestehender Methoden sollen gleich bleiben.

Zusätzliche Funktionen

- `append(x)` (manchmal push) - Element x ans Ende anfügen
- `insert(i, x)` - Element x an Stelle i einfügen
- `pop()` - letztes Element entfernen
- `remove(i)` - Element an position i löschen

Was ist die Laufzeitkomplexität dieser Funktionen?

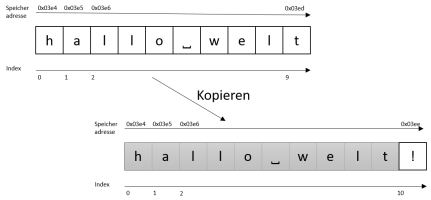
Empirische Laufzeitanalyse, Python Arrays



IPython Notebook: Arrays-und-linked-lists.ipynb

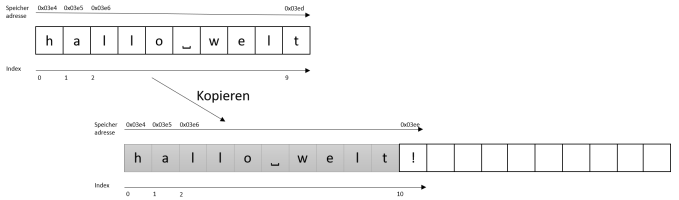
Arrays vergrössern / verkleinern : Naive Methode

- append (und insert) müssen Array vergrössern.
- pop muss Array verkleinern
- Naive Methode: Jeweils um 1 grösses/kleineres Array anlegen
  - Element in neues Array kopieren



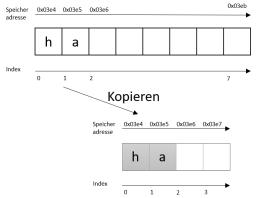
Arrays vergrössern : Schlauere Methode

- append (und insert) müssen Array vergrössern.
- Grösseres Array (von $2n$ Elementen) anlegen.
  - Array muss nur bei jeden n-ten Aufruf von append kopiert werden.



Arrays verkleinern : Schlauere Methode

- pop muss Array verkleinern
- Kleineres Array anlegen nur wenn Array zu $n/4$ gefüllt.
- In neues Array der Grösse $n/2$ kopieren.
  - Array muss nur bei jeden $n/4$-ten Aufruf von pop kopiert werden.



Implementation: Arrays vergrössern / verkleinern (1)

- Implementation der append und pop Methode.

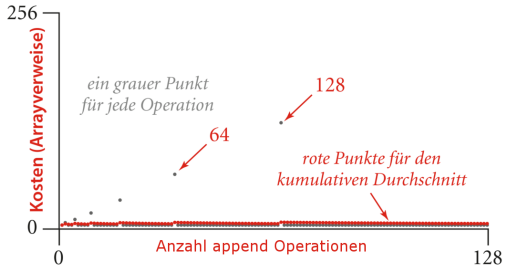
```
class Array:
  _data = [None] # list simulates block of memory
  _lastIdx = 0

  def append(self, elem):
      if len(self._data) == self._lastIdx:
          self._resize(len(self._data) * 2)
      self._data[self._lastIdx] = elem
      self._lastIdx += 1

  def pop(self, elem):
    self._lastIdx -= 1
    item = self._data[self._lastIdx];
    if self._lastIdx > 0
       and self._lastIdx == len(self._data) / 4:
      self._resize(int(len(self._data) / 2));

    return item;
```

Implementation: Arrays vergrössern /verkleinern (2)

```
class Array:
  _data = [None] # list simulates block of memory
  _lastIdx = 0

  def append(self, elem):
    ...

  def pop(self, elem):
    ...

  def _resize(self, numElements ):
    newArray = [None] * numElements
    for i in range(0, self._lastIdx):
        newArray[i] = self._data[i]
    self._data = newArray
```


Theoretische Analyse der append Operation

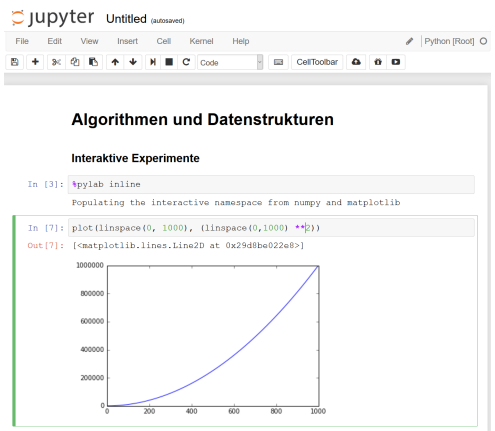
Die append Operation hat (amortisierte) Laufzeit $O(1)$



Quelle: Abbildung 1.28 - Algorithms, Sedgewick & Wayne

- Amortisierte Analyse: Mittlere Laufzeit pro Operation wird über Seqenz von N Operationen (im worst case) ermittelt.

Amortisierte Analyse



IPython Notebook: Arrays-und-linked-lists.ipynb

Analyse der append Operation: Beweisskizze

Annahmen:

- N ist Zweierpotenz.
- Wir starten mit Array der Grösse 1

Betrachte N aufeinanderfolgende Aufrufe von append. Wir haben folgende Anzahl Arrayzugriffe

$$N + 4 + 8 + 16 + \ldots + N + 2N$$

Wir nutzen, dass $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

$N + 4 + 8 + 16 + \ldots + N + 2N \leq 3N + \sum_{i=0}^{\log_2 N} 2^i =$
$3N + 2^{(\log_2 N)+1} - 1 = 3N + 2 \cdot 2^{\log_2 N} - 1 \leq 5N$

Beobachtung: Kosten pro Aufruf von append sind konstant (< 5N Operationen für N Aufrufe)

B2.2 Verkettete Listen

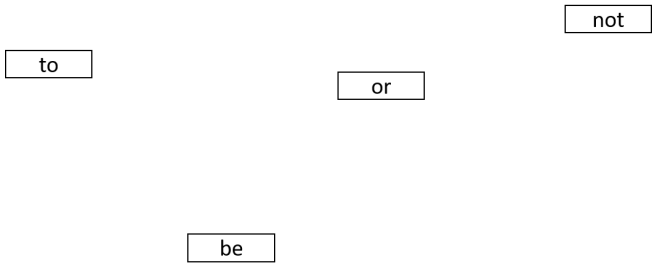
Motivation

- Arrays sind nicht flexibel genug
- Brauchen immer grossen, kontinuierlichen Block an Speicher
- Einfügen von Elementen an beliebiger Position ist teuer

Lösung muss uns erlauben Elemente im Speicher zu verteilen.

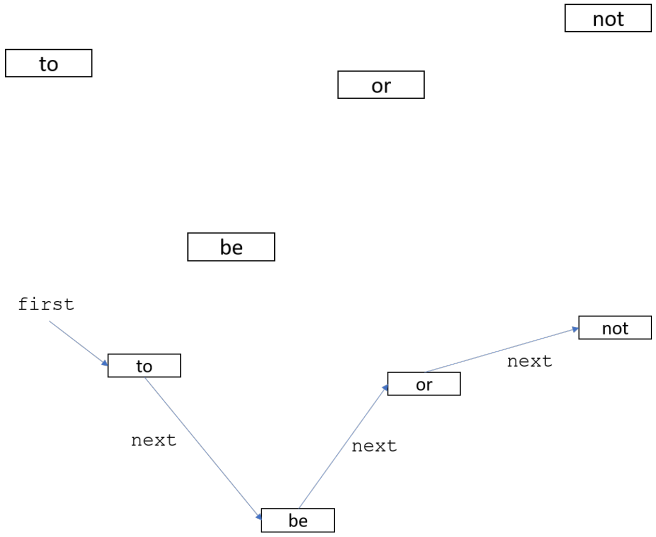
Frage?

- Wie kann man Elemente ordnen die verteilt im Speicher sind?



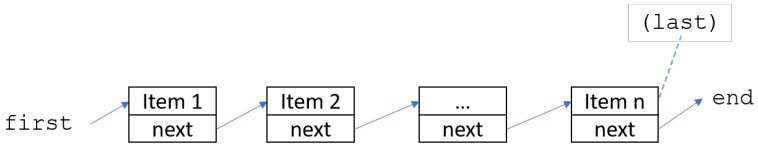
Frage?

- Wie kann man Elemente ordnen die verteilt im Speicher sind?



Verkettete Listen

- Wichtige, flexible Datenstruktur
- Jeder Knoten speichert sein Datum, sowie eine Referenz (Zeiger) auf Nachfolger
- Ende muss speziell gekennzeichnet werden (häufig null/None).
- ... oder wir brauchen Referenz auf letztes Element



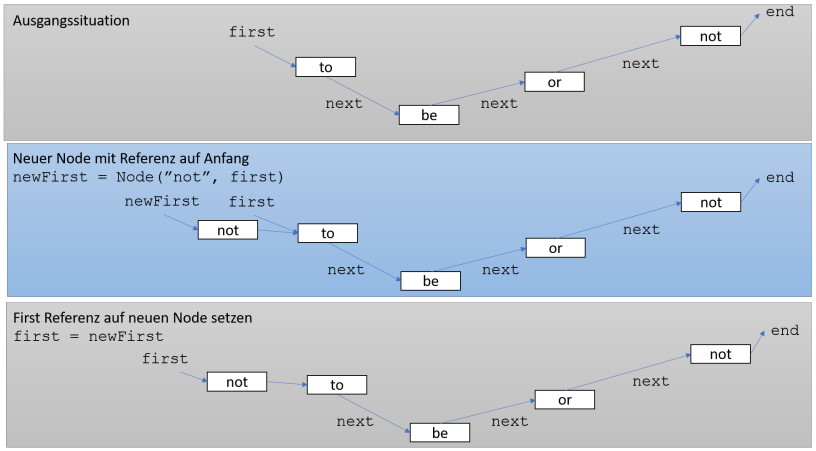
Komplexität Array / Verkettete Liste

Operation	Array	Verkettete Liste
Zugriff auf beliebiges Element	$O(1)$	$O(n)$
Einfügen, Löschen am Anfang	$O(n)$	$O(1)$
Einfügen am Ende	$O(1)$ (ammortisiert)	$O(1)$
Löschen am Ende	$O(1)$ (ammortisiert)	$O(n)$
Einfügen, Löschen in Mitte	$O(n)$	$O(n)$
Verschwendeter Speicher	$O(1)$	$O(n)$

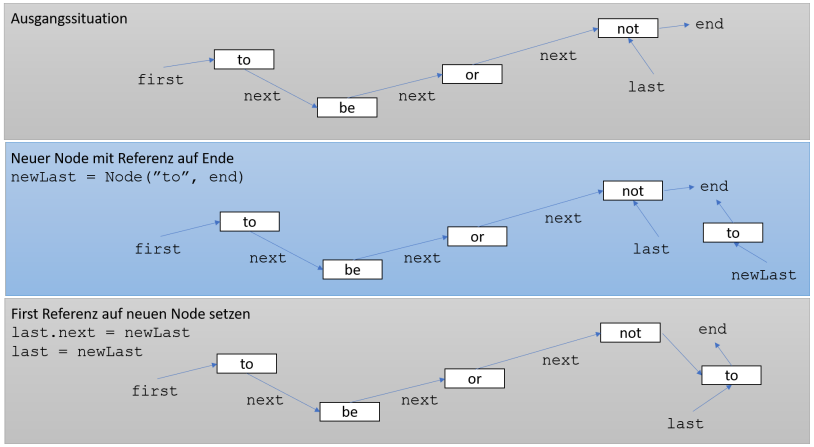
Take-home Message

- Verschiedene Datenstrukturen machen verschiedene Trade-offs

Einfügen am Anfang



Einfügen am Ende



Weitere Operationen

Einfach:

- Vom Anfang entfernen
- Traversieren

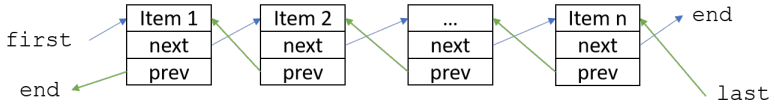
Schwierig:

- Vom Ende entfernen
- An beliebiger Position einfügen
- An beliebiger Position entfernen
- Element an beliebiger Position lesen/schreiben

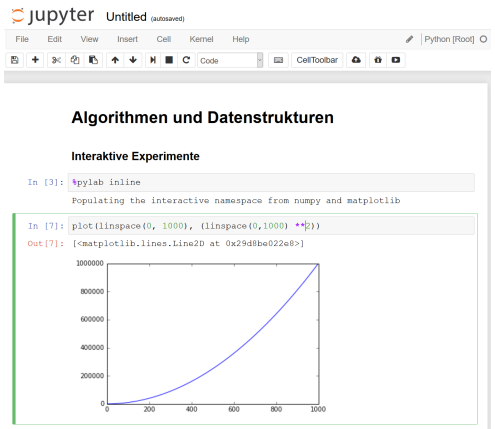
Einfach/Schwierig bezieht sich auf Aufwand und nicht Implementation.

Doppelt verkettete Liste

- Referenz nicht nur auf Nachfolger, sondern auch vorhergehendes Element
- Macht Entfernen vom Ende günstig.



Implementation in Python

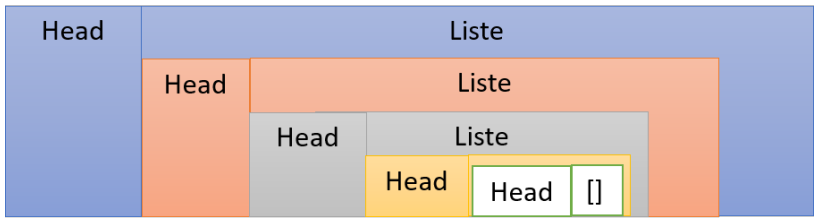


IPython Notebook: Arrays-und-linked-lists.ipynb

Rekursive Definition

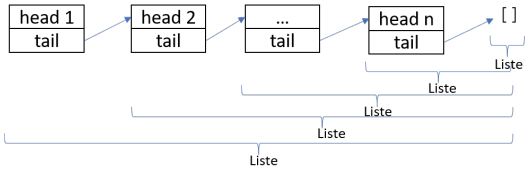
Eine Liste L ist

- die leere Liste
- oder ein Element H (Head) gefolgt von einer Liste: H, L



Verkettete Listen: Datenstruktur (rekursiv)

```
class List[Item]:
  head : Item
  tail : List[Item]
  List(head : Item, tail : List[Item]) # Konstruktor

emptyList = List(None, None)
```



Verkettete Listen: Datenstruktur (rekursiv)

```
class List[Item]:
  head : Item
  tail : List[Item]
  List(head : Item, tail : List[Item]) # Konstruktor

emptyList = List(None, None)
```

Vergleiche:

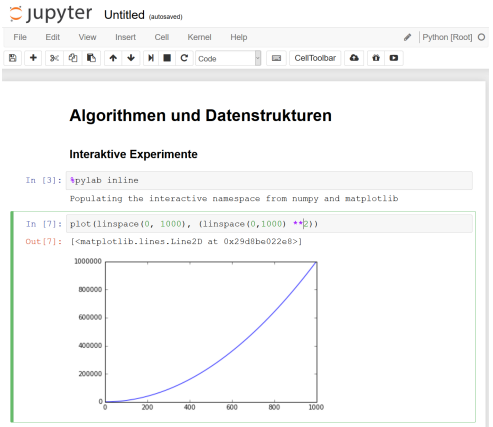
```
class Node[Item]:
  item : Item
  next : Node
  Node(head : Item, tail : Node[Item])  # Konstruktor
```


Verkettete Listen (rekursiv)

- Natürliche, rekursive Implementation vieler Operationen
- Implementation folgt Datenstruktur

```
def printList(list):
  if (list == emptyList):
      return ""
  else:
      return str(list.head) + printList(list.tail)
```


Implementation in Python



IPython Notebook: Arrays-und-linked-lists.ipynb