Algorithmen und Datenstrukturen

A12. Sortieren: Quicksort, Countingsort, Radixsort

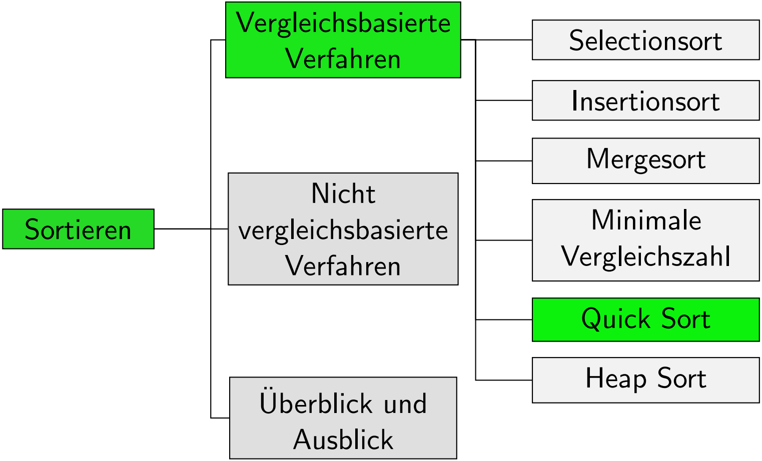
Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

24. März 2021

A12.1 Quicksort

Sortierverfahren



Quicksort: Idee

- Wie Merge-Sort ein Divide-and-Conquer-Verfahren
- Die Sequenz wird nicht wie bei Mergesort nach Positionen aufgeteilt, sondern nach Werten.
- Hierfür wird ein Element P gewählt (das sogenannte Pivotelement).
- Dann wird so umsortiert, dass P an die endgültige Position kommt, vor P nur Elemente $\leq P$ stehen, und hinten nur Elemente $\geq P$.

$\leq P$	P	$\geq P$

- Macht man das rekursiv für den vorderen und den hinteren Teil, ist die Sequenz am Ende sortiert.

Quicksort: Algorithmus

```python
def sort(array):
    sort_aux(array, 0, len(array)-1)

def sort_aux(array, lo, hi):
    if hi <= lo:
        return
    choose_pivot_and_swap_it_to_lo(array, lo, hi)
    pivot_pos = partition(array, lo, hi)
    sort_aux(array, lo, pivot_pos - 1)
    sort_aux(array, pivot_pos + 1, hi)
```

Wie wählt man das Pivot-Element?

Für die Korrektheit des Verfahrens ist das egal. (Warum?)

Wir können zum Bsp. folgende Strategien wählen:

- Naiv: Nimm immer erstes Element
- Median of Three: Verwende Median aus erstem, mittlerem und letztem Element
- Randomisiert: Wähle zufällig ein Element aus

Gute Pivot-Elemente teilen Sequenz in etwa gleich grosse Bereiche.

Wie macht man die Umsortierung?

array

	lo					hi	
···	5	7	4	2	3	6	···
		i				j	
···	5	7	4	2	3	6	···
		i			j		
···	5	7	4	2	3	6	···
			i	j			
···	5	3	4	2	7	6	···
				j	i		
···	5	3	4	2	7	6	···
				j	i		
···	2	3	4	5	7	6	···

Pivot ist an Pos 0.

Initialisiere $i = \mathrm{lo} + 1, j = \mathrm{hi}$

i nach rechts bis zu Element $\geq$ Pivot,

j nach links bis Element $\leq$ Pivot

Falls $i < j$: Elemente tauschen, $i{+}{+}$, $j{-}{-}$

i nach rechts bis zu Element $\geq$ Pivot,

j nach links bis Element $\leq$ Pivot

$i \geq j$: noch Pivot an Pos j tauschen

Fertig!

Quicksort: Partitionierung

```
def partition(array, lo, hi):
    pivot = array[lo]
    i = lo + 1
    j = hi
    while (True):
        while i < hi and array[i] < pivot:
            i += 1
        while array[j] > pivot:
            j -= 1
        if i >= j:
            break

        array[i], array[j] = array[j], array[i]
        i, j = i + 1, j - 1
    array[lo], array[j] = array[j], array[lo]
    return j
```

Aufgabe (Slido)

Wie sieht das Array [6, 5, 7, 8, 3] nach einem Aufruf von `partition` für den gesamten Bereich (von Position 0 bis 4) aus?

Quicksort: Laufzeit I

Best case: Pivot-Element teilt in gleich grosse Bereiche

- $O(\log_2 n)$ rekursive Aufrufe
- jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung
- auf einer Rekursionsebene insgesamt $O(n)$ Vergleiche in Partitionierung

$\rightarrow$ $O(n \log n)$

Worst case: Pivot-Element immer kleinstes oder grösstes Element

- insgesamt n-1 (nichttriviale) rekursive Aufrufe für Länge $n, n-1, \ldots, 2$.
- jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung

$\rightarrow$ $\Theta(n^2)$

Quicksort: Laufzeit II

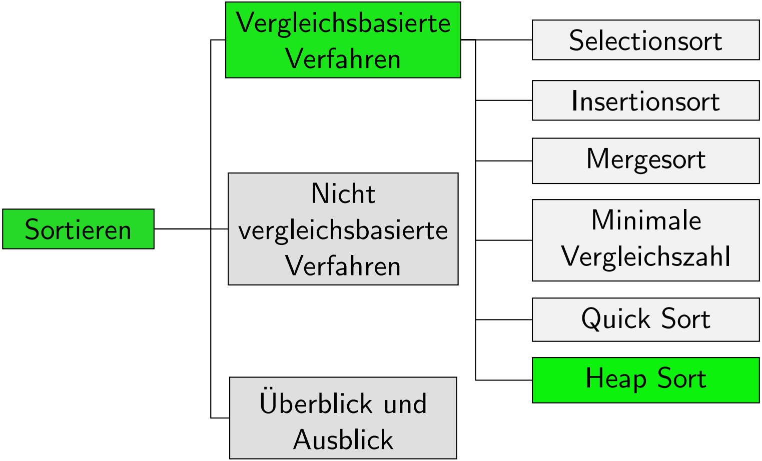
Average case:

- Annahme: n verschiedene Elemente,
  jede der $n!$ Permutationen gleich wahrscheinlich,
  Pivotelement zufällig gewählt
- $O(\log n)$ rekursive Aufrufe
- insgesamt $O(n \log n)$
- etwa 39% langsamer als best case

Bei randomisierter Pivotwahl tritt worst-case quasi nicht auf.
Quicksort wird daher oft als $O(n \log n)$-Verfahren betrachtet.

A12.2 Heapsort

Sortierverfahren

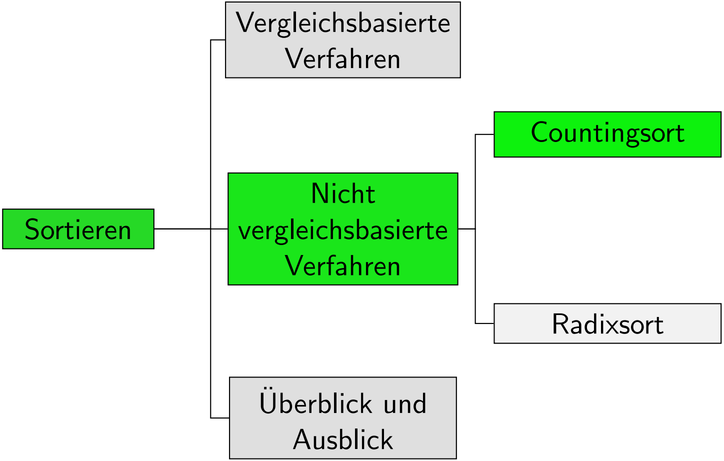


Heapsort

- Heap: Datenstruktur, die das Finden und Entnehmen des grössten Elements besonders effizient unterstützt
  Finden: $\Theta(1)$, Entnehmen: $\Theta(\log n)$
- Grundidee analog zu Selectionsort: Setze sukzessive das grösste Element an das Ende des unsortierten Bereichs.
- Kann den Heap direkt in der Eingabesequenz repräsentieren, so dass Heapsort nur konstanten zusätzlichen Speicherplatz benötigt.
- Die Laufzeit von Heapsort ist leicht überlinear.
- Wir besprechen die Details später, wenn wir Heaps genauer kennengelernt haben.

A12.3 Nicht vergleichsbasierte Verfahren

Sortierverfahren



Countingsort: Idee

„Sortieren durch Zählen"

- Annahme: Elemente sind aus Bereich $0, \dots, k-1$.
- Laufe einmal über die Eingabesequenz und zähle dabei, wie oft jedes Element vorkommt.
- Sei $\#i$ die Anzahl der Vorkommen von Element i.
- Iteriere $i = 0, \dots, k-1$ und schreibe jeweils $\#i$-mal Element i in die Sequenz.

Countingsort: Algorithmus

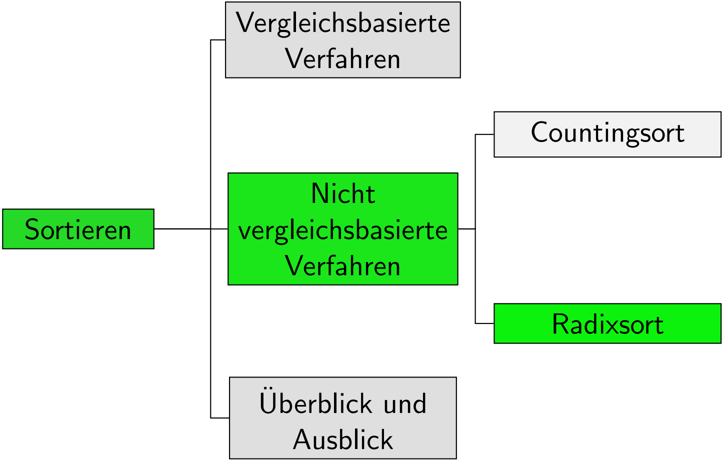
```
def sort(array, k):
    counts = [0] * k  # list of k zeros
    for elem in array:
        counts[elem] += 1

    pos = 0
    for i in range(k):
        occurrences_of_i = counts[i]
        for j in range(occurrences_of_i):
            array[pos + j] = i
        pos += occurrences_of_i
```

Laufzeit: $O(n + k)$ (n Grösse der Eingabesequenz)

$\rightarrow$ Für festes k linear

Sortierverfahren



Radixsort: Idee

„Sortieren durch Fachverteilen"

- Annahme: Schlüssel sind Zahlen im Dezimalsystem
  z.B. 763, 983, 96, 286, 462
- Teile Zahlen nach letzter Stelle auf:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		462	763			96			
			983			286			

- Sammle Zahlen von vorne nach hinten/oben nach unten auf
  462, 763, 983, 96, 286
- Teile Zahlen nach vorletzter Stelle auf, sammle sie auf.
- Teile Zahlen nach drittletzter Stelle auf, sammle sie auf.
- usw. bis alle Stellen betrachtet wurden.

Radixsort: Beispiel

- Eingabe: 263, 983, 96, 462, 286
- Aufteilung nach letzter Stelle:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		462	263			96			
			983			286			

  Aufsammeln ergibt: 462, 263, 983, 96, 286
- Aufteilung nach vorletzter Stelle:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
						462		983	96
						263		286	

  Aufsammeln ergibt: 462, 263, 983, 286, 96
- Aufteilung nach drittletzter Stelle:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
096		263		462					983
		286							

  Aufsammeln ergibt: 96, 263, 286, 462, 983

Jupyter-Notebook

Jupyter-Notebook: `radix_sort.ipynb`

Radixsort: Algorithmus (für beliebige Basis)

```
def sort(array, base=10):
    if not array:  # array is empty
        return
    iteration = 0
    max_val = max(array) # identify largest element
    while base ** iteration <= max_val:
        buckets = [[] for num in range(base)]
        for elem in array:
            digit = (elem // (base ** iteration)) % base
            buckets[digit].append(elem)
        pos = 0
        for bucket in buckets:
            for elem in bucket:
                array[pos] = elem
                pos += 1
        iteration += 1
```

Radixsort: Laufzeit

- m: Maximale Anzahl Stellen in Repräsentation mit gegebener Basis b.
- n: Länge der Eingabesequenz
- Laufzeit in $O(m \cdot (n + b))$

Für festes m und b hat Radixsort lineare Laufzeit.

A12.4 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Quicksort ist ein Divide-and-Conquer-Verfahren, das die Elemente relativ zu einem Pivotelement aufteilt.
- Countingsort und Radixsort sind nicht vergleichsbasiert und erlauben (unter bestimmten Restriktionen) ein Sortieren in linearer Zeit.
- Sie machen jedoch zusätzliche Einschränkungen an die verwendeten Schlüssel.