

Algorithmen und Datenstrukturen

A10. Laufzeitanalyse: Anwendung

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

18. März 2021

Algorithmen und Datenstrukturen

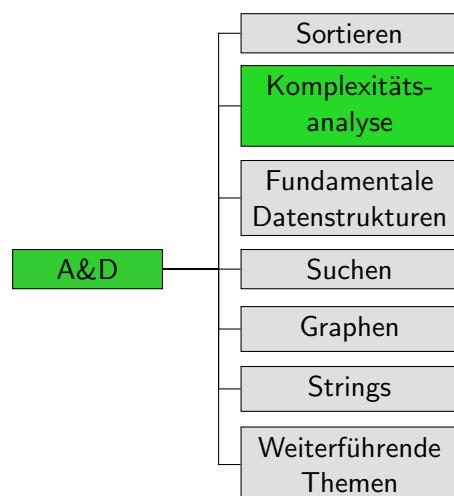
18. März 2021 — A10. Laufzeitanalyse: Anwendung

A10.1 Kurze Wiederholung

A10.2 Anwendung

A10.3 Zusammenfassung

Inhalt dieser Veranstaltung



A10.1 Kurze Wiederholung

Landau-Symbole

- „ f wächst genauso schnell wie g “

$$\Theta(g) = \{f \mid \exists c > 0 \exists c' > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)\}$$

- „ f wächst nicht wesentlich schneller als g “

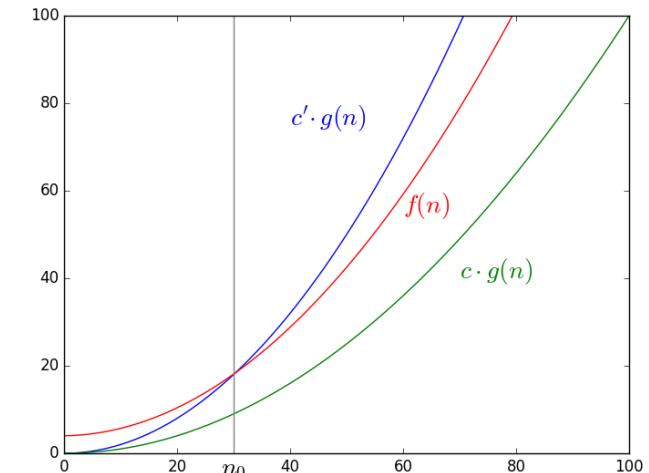
$$O(g) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

- „ f wächst nicht wesentlich langsamer als g “

$$\Omega(g) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

Landau-Symbol Theta: Illustration

$$f \in \Theta(g)$$



Interessante Funktionsklassen

In aufsteigender Ordnung (abgesehen von allgemeinen n^k):

g	Wachstum
1	konstant
$\log n$	logarithmisch
n	linear
$n \log n$	leicht überlinear
n^2	quadratisch
n^3	kubisch
n^k	polynomiell (Konstante k)
2^n	exponentiell

Zusammenhänge

Es gilt:

- $O(1) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(n^k) \subset O(2^n)$
(für $k \geq 2$)
- $O(n^{k_1}) \subset O(n^{k_2})$ für $k_1 < k_2$
z.B. $O(n^2) \subset O(n^3)$

Rechenregeln

► Produkt

$f_1 \in O(g_1)$ und $f_2 \in O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 \in O(g_1 g_2)$

► Summe

$f_1 \in O(g_1)$ und $f_2 \in O(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(g_1 + g_2)$

► Multiplikation mit Konstante

$k > 0$ und $f \in O(g) \Rightarrow kf \in O(g)$

$k > 0 \Rightarrow O(kg) = O(g)$

A10.2 Anwendung

Schnelle O -Analyse für häufige Code-Konstrukte I

► konstante Operation

var = 4	$O(1)$
---------	--------

► Sequenz konstanter Operationen

var1 = 4	$O(1)$	$O(123 \cdot 1) = O(1)$
var2 = 4	$O(1)$	
...	$O(1)$	
var123 = 4	$O(1)$	

Schnelle O -Analyse für häufige Code-Konstrukte II

► Schleife

for i in range(n):	$O(n)$	$O(n \cdot 1) = O(n)$
res += i * m	$O(1)$	

for i in range(n):	$O(n)$	$O(n)$	$O(n^2)$
for j in range(i):	$O(n)$	$O(1)$	

i hängt von *n* ab

Schnelle O -Analyse für häufige Code-Konstrukte III

► if-then-else

if var < bound:	$O(1)$	$O(1)$	$O(1 + \max\{1, n\})$
res += var	$O(1)$	$O(1)$	
else:			$= O(n)$
for i in range(n):	$O(n)$	$O(n \cdot 1)$	
res += i * n	$O(1)$	$= O(n)$	

Achtung: Kann zu unnötig hoher Abschätzung führen, wenn teurer Fall nur für kleine n auftritt (durch Konstante begrenzt).

Beispiel: Worst Case für Insertionsort

```

1 def insertion_sort(array):
2     n = len(array)
3     for i in range(1, n): # i = 1, ..., n - 1
4         # move array[i] to the left until it is
5         # at the correct position.
6         for j in range(i, 0, -1): # j = i, ..., 1
7             if array[j] < array[j-1]:
8                 array[j], array[j-1] = array[j-1], array[j]
9             else:
10                 break

```

- Worst case: break-Fall tritt nie ein.
- $O(1 + n \cdot n \cdot 1) = O(n^2)$
- **Überschätzt?**
Nein, beide Schleifen haben jeweils $\Omega(n)$ Durchläufe.

Beispiel: Best Case für Insertionsort

```

1 def insertion_sort(array):
2     n = len(array)
3     for i in range(1, n): # i = 1, ..., n - 1
4         # move array[i] to the left until it is
5         # at the correct position.
6         for j in range(i, 0, -1): # j = i, ..., 1
7             if array[j] < array[j-1]:
8                 array[j], array[j-1] = array[j-1], array[j]
9             else:
10                 break

```

- Best case: break jeweils direkt bei $j = i$
- $O(1 + n \cdot 1 \cdot 1) = O(n)$
- **Überschätzt?**
Nein, die äussere Schleifen hat $\Omega(n)$ Durchläufe.

Klausuraufgabe 2019

Betrachten Sie folgendes Codefragment. Geben Sie die asymptotische Laufzeit in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ in Θ -Notation an und begründen Sie Ihre Antwort kurz (1-2 Sätze).

```

1 int result = 0;
2 if (n > 23) {
3     return result;
4 }
5 for (int i = 0; i < n; i++) {
6     for (int j = 0; j < n; j++) {
7         result += j;
8     }
9 }
10 return result;

```

Klausuraufgabe 2019

Betrachten Sie folgendes Codefragment. Geben Sie die asymptotische Laufzeit in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ in Θ -Notation an und begründen Sie Ihre Antwort mit der genauen Anzahl der Ausführungen der Anweisung in Zeile 4 (in Abhängigkeit von n).

```

1  int result = 0;
2  for (int i = 0; i < n; i++) {
3      for (int j = i; j < n; j++) {
4          result += j;
5      }
6  }

```

Jetzt: nur Θ -Notation



Warum interessiert uns das alles?

- ▶ Weil Algorithmen/Datenstrukturen mit schlechter Laufzeitkomplexität zurückslagen!
- ▶ Beispiel: GTA online hatte viele Jahre eine Ladezeit von mehreren Minuten
 - ▶ mehrere Minuten zum Parsen von 10 Megabyte JSON-Daten!
 - ▶ vmtl. schlechte Library zum Parsen
 - ▶ ungeeignete Datenstruktur zum Testen auf Duplikate
 - ▶ nach Fix: 70% weniger Ladezeit
 - ▶ <https://nee.lv/2021/02/28/How-I-cut-GTA-Online-loading-times-by-70/index.html>

A10.3 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ In der Praxis können wir mit einfachen "Kochrezepten" recht schnell einen Eindruck von der Laufzeit eines Verfahrens bekommen.
- ▶ **Insertionsort** hat
 - ▶ im **besten Fall** Laufzeit $\Theta(n)$
 - ▶ im **schlechtesten Fall** Laufzeit $\Theta(n^2)$