Algorithmen und Datenstrukturen

A9. Laufzeitanalyse: Landau-Symbole

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

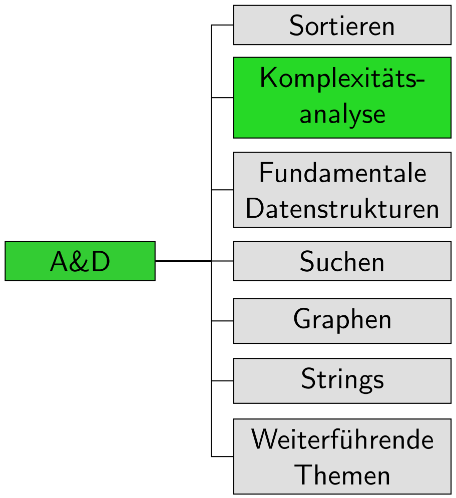
Universität Basel

17. März 2021

Algorithmen und Datenstrukturen

17. März 2021 — A9. Laufzeitanalyse: Landau-Symbole

Inhalt dieser Veranstaltung



A9.1 Landau-Notation

Ergebnis für Mergesort

„Die Laufzeit von Mergesort wächst genauso schnell wie $n \log_2 n$."

Theorem
Mergesort hat leicht überlineare Laufzeit, d.h.
es gibt Konstanten $c, c', n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$:
$cn \log_2 n \leq T(n) \leq c'n \log_2 n$.

- Wir haben Terme niedrigerer Ordnung (Konstanten und n) in der Abschätzung ignoriert bzw. verschwinden lassen.
- Wir haben uns nicht für die genauen Werte der Konstanten interessiert, es reicht, wenn irgendwelche passenden Konstanten existieren.
- Die Laufzeit für kleine n ist nicht so wichtig.

Mehr bisherige Ergebnisse

Theorem
Der Merge-Schritt hat lineare Laufzeit, d.h. es gibt Konstanten $c, c', n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$: $cn \leq T(n) \leq c'n$.

Theorem
Mergesort hat leicht überlineare Laufzeit, d.h.
es gibt Konstanten $c, c', n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$:
$cn \log_2 n \leq T(n) \leq c'n \log_2 n$.

Theorem
Selectionsort hat quadratische Laufzeit, d.h. es gibt Konstanten $c > 0, c' > 0, n_0 > 0$, so dass für $n \geq n_0$: $cn^2 \leq T(n) \leq c'n^2$.

Können wir das nicht irgendwie kompakter aufschreiben?

Edmund Landau

Edmund Landau
- deutscher Mathematiker (1877–1938)
- analytische Zahlentheorie
- kein Freund angewandter Mathematik

International: Bachmann–Landau-Notation auch nach Paul Gustav Heinrich Bachmann (deutscher Mathematiker)

Landau-Symbol Theta

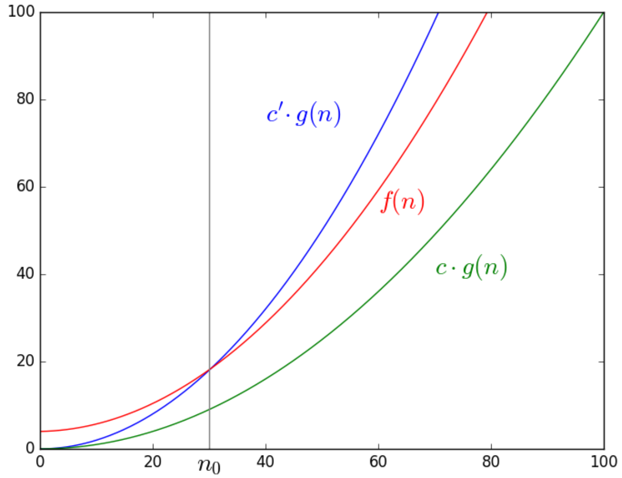
Definition
Für eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist $\Theta(g)$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die genauso schnell wachsen wie g:

$$\Theta(g) = \{f \mid \exists c > 0 \; \exists c' > 0 \; \exists n_0 > 0 \; \forall n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)\}$$

„Die Laufzeit von Mergesort ist in $\Theta(n \log_2 n)$."
oder auch
„Die Laufzeit von Mergesort ist $\Theta(n \log_2 n)$."

Landau-Symbol Theta: Illustration

$$f \in \Theta(g)$$



Jupyter-Notebook (mit Aufgaben)

Jupyter-Notebook: `landau.ipynb`

Mehr Landau-Symbole

- „f wächst nicht wesentlich schneller als g“

  $$O(g) = \{f \mid \exists c > 0 \; \exists n_0 > 0 \; \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

- O für „Ordnung“ der Funktion
- „f wächst nicht wesentlich langsamer als g“

  $$\Omega(g) = \{f \mid \exists c > 0 \; \exists n_0 > 0 \; \forall n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

- Es gilt $\Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$.
- Es gilt $f \in \Omega(g)$ gdw. $g \in O(f)$.
- In der Informatik interessieren wir uns oft nur für die Begrenzung des Laufzeitwachstums nach oben: O statt Θ

Aussprache: Θ: Theta, Ω: Omega, O: Oh

Seltener benötigte Landau-Symbole

- „f wächst langsamer als g“

  $$o(g) = \{f \mid \forall c > 0 \; \exists n_0 > 0 \; \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

- „f wächst schneller als g“

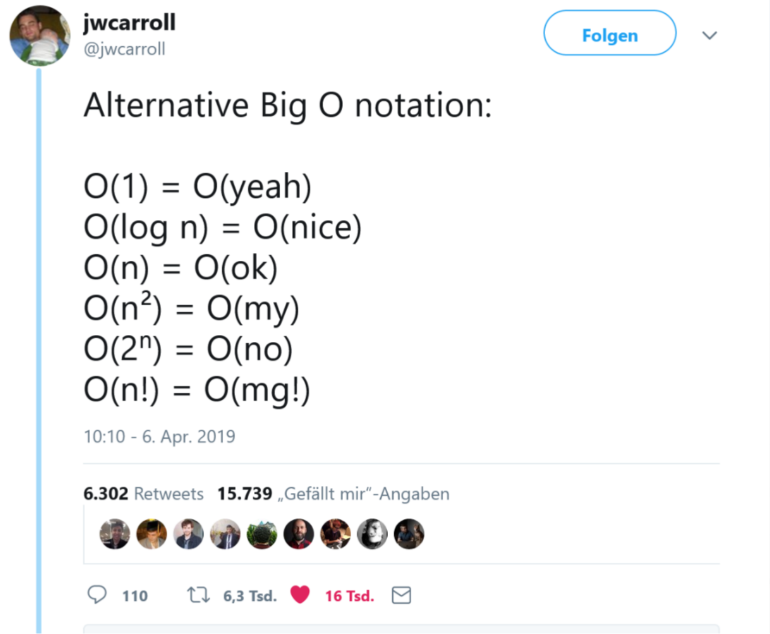
  $$\omega(g) = \{f \mid \forall c > 0 \; \exists n_0 > 0 \; \forall n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

Aussprache: ω: kleines Omega

Interessante Funktionsklassen

In aufsteigender Ordnung (abgesehen von allgemeinen n^k):

g	Wachstum
1	konstant
$\log n$	logarithmisch
n	linear
$n \log n$	leicht überlinear
n^2	quadratisch
n^3	kubisch
n^k	polynomiell (Konstante k)
2^n	exponentiell



A9.2 Rechenregeln

Beispiele Θ

- Bei der Analyse interessiert nur der Term höchster Ordnung (= am schnellsten wachsender Summand) einer Funktion.
- Beispiele
  - $f_1(n) = 5n^2 + 3n - 9 \ \in \Theta(n^2)$
  - $f_2(n) = 3n \log_2 n + 2n^2 \ \in \Theta(n^2)$
  - $f_3(n) = 9n \log_2 n + n + 17 \ \in \Theta(n \log n)$
  - $f_4(n) = 8 \ \in \Theta(1)$

Beispiele Gross-O

- Bei der Analyse interessiert nur der Term höchster Ordnung (= am schnellsten wachsender Summand) einer Funktion.
- Beispiele
  - $f_1(n) = 8n^2 - 3n - 9 \ \in O(n^2)$
  - $f_2(n) = n^3 - 3n \log_2 n \ \in O(n^3)$
  - $f_3(n) = 3n \log_2 n + 1000n + 10^{200} \ \in O(n \log n)$
- Warum ist das so?

Zusammenhänge

Es gilt:

- $O(1) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(n^k) \subset O(2^n)$ (für $k \geq 2$)
- $O(n^{k_1}) \subset O(n^{k_2})$ für $k_1 < k_2$
  z.B. $O(n^2) \subset O(n^3)$

Rechenregeln

- Produkt
  $f_1 \in O(g_1)$ und $f_2 \in O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 \in O(g_1 g_2)$
- Summe
  $f_1 \in O(g_1)$ und $f_2 \in O(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(g_1 + g_2)$
- Multiplikation mit Konstante
  $k > 0$ und $f \in O(g) \Rightarrow kf \in O(g)$
  $k > 0 \Rightarrow O(kg) = O(g)$

Grund für Beschränkung auf Term höchster Ordnung

Beispiel: $5n^3 + 2n \in O(n^3)$

- Wegen Regel bzgl. Multiplikation mit Konstante:
  - $5n^3 \in O(n^3)$
  - $2n \in O(n)$
- Wegen $O(n) \subset O(n^3)$ und $2n \in O(n)$:
  - $2n \in O(n^3)$
- Wegen Summenregel:
  - $5n^3 + 2n \in O(n^3 + n^3)$
- Mit Multiplikation mit Konstante (bei Klasse):
  - $5n^3 + 2n \in O(n^3)$

A9.3 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Mit Landau-Symbolen definiert man Klassen von Funktionen, die nicht schneller/nicht langsamer/... wachsen als eine Funktion g.
  - $O(g)$: Wachstum nicht schneller als g
  - $\Theta(g)$: Wachstum im Wesentlichen wie g