

Algorithmen und Datenstrukturen

A4. Sortieren II: Mergesort

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

4./10. März 2021

Mergesort
●○○○

Merge-Schritt
○○○○○○○

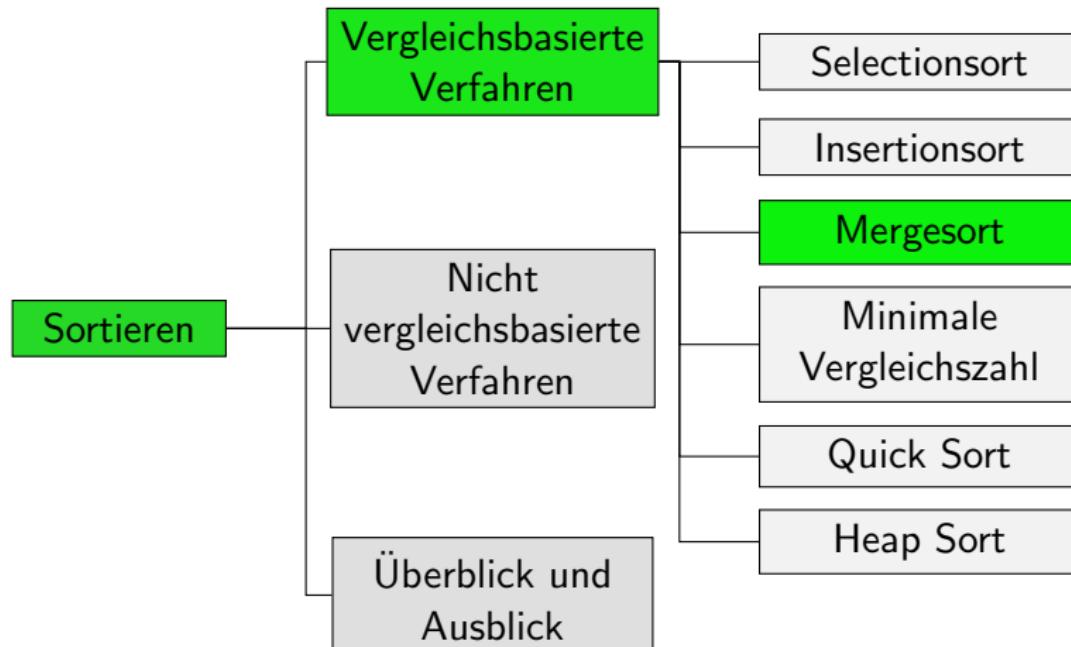
Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort

Sortierverfahren



Mergesort: Idee

- **Beobachtung:** zwei bereits sortierte Sequenzen lassen sich leicht zu einer sortierten Sequenz vereinen.
- Sequenzen mit einem oder keinem Element sind sortiert.
- **Idee** für längere Sequenzen:
 - Teile Eingabesequenz in zwei etwa gleich grosse Teilbereiche
 - Rekursiver Aufruf für beide Teilbereiche
 - Füge nun sortierte Teilbereiche zusammen.
- **Teile-und-Herrsche-Ansatz** (divide and conquer)

Mergesort
○○○●

Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration

7 3 2 9 7 1 4 5

Mergesort
○○○●

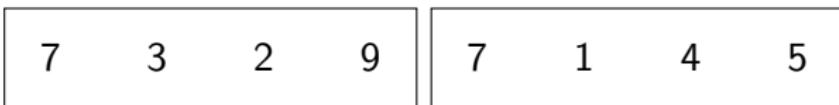
Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

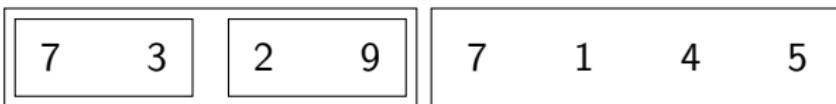
Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

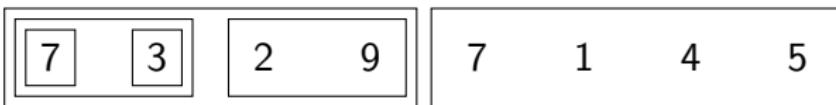
Merge-Schritt
○○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

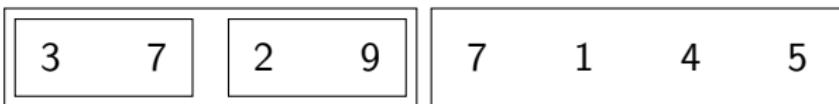
Merge-Schritt
○○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

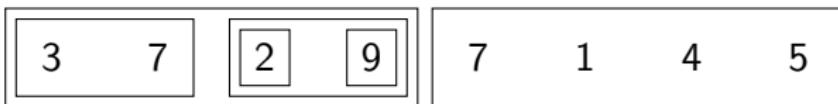
Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

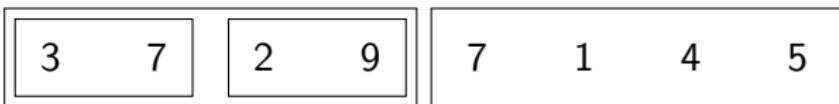
Merge-Schritt
○○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration



Mergesort
○○○●

Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Mergesort: Illustration

1 2 3 4 5 7 7 9

Mergesort
oooo

Merge-Schritt
●oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
oooo

Zusammenfassung
oo

Merge-Schritt

Verbinden der Teillösungen

- Indizes $lo \leq mid < hi$
- **Annahme:** array[lo] bis array[mid] und array[$mid+1$] bis array[hi] sind bereits sortiert
- **Ziel:** array[lo] bis array[hi] ist sortiert
- **Idee:** gehe parallel von vorne nach hinten durch beide Teilbereiche und sammle das jeweils kleinere Element auf
- Verwendet zusätzlichen Speicher für aufgesammelte Werte

Mergesort
oooo

Merge-Schritt
○○●○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
oooo

Zusammenfassung
oo

Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.

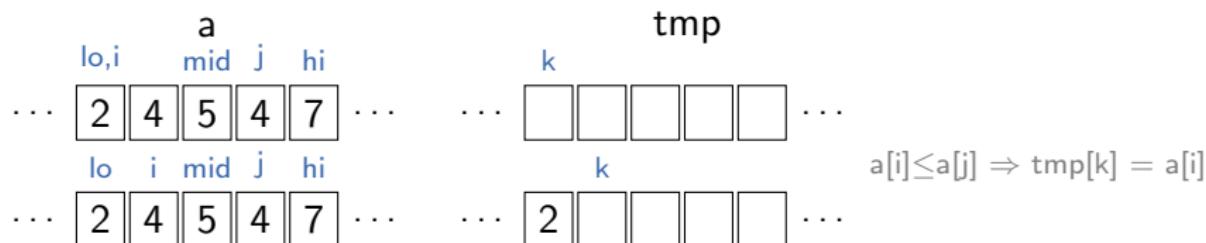
Initialisierung: $i := lo$, $j := mid + 1$, $k := lo$



Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.

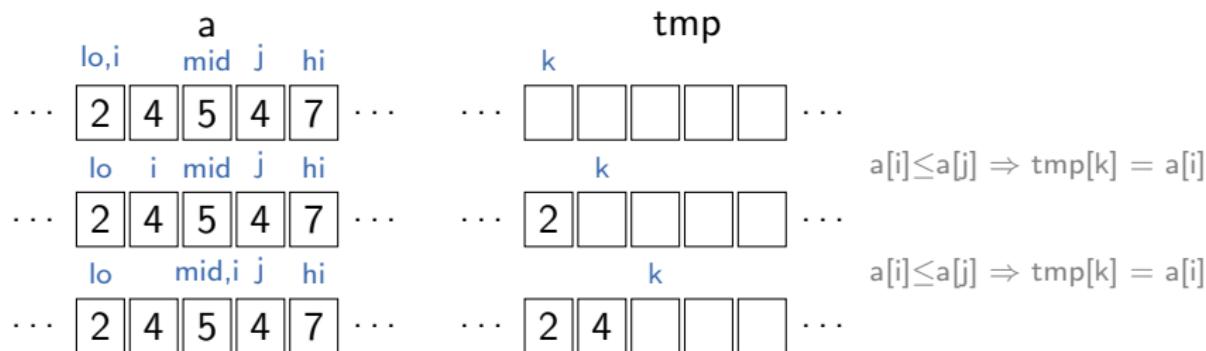
Initialisierung: $i := lo$, $j := mid + 1$, $k := lo$



Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.

Initialisierung: $i := lo$, $j := mid + 1$, $k := lo$

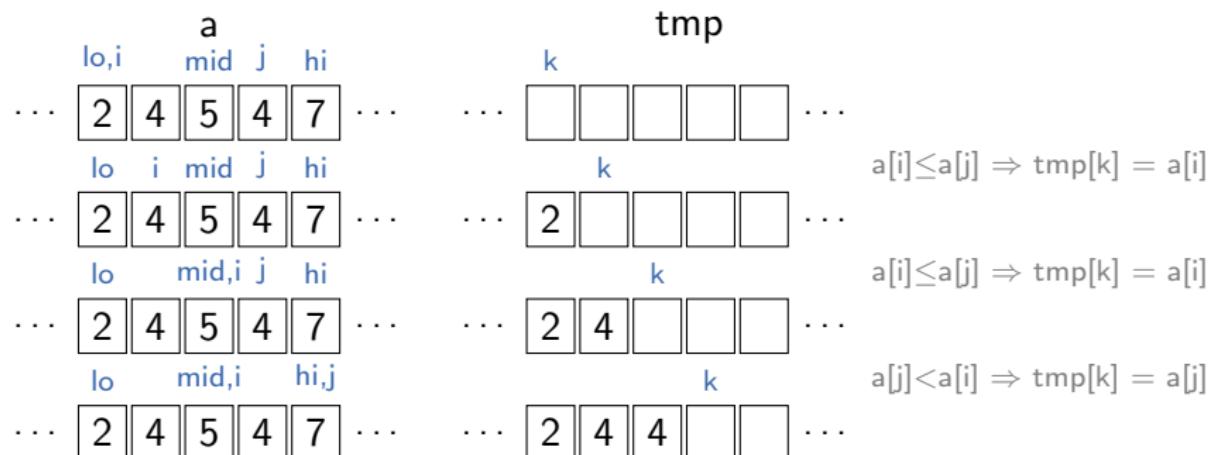


Mergesort
ooooMerge-Schritt
o•oooTop-Down-Mergesort
ooooooooBottom-Up-Mergesort
ooooZusammenfassung
oo

Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.

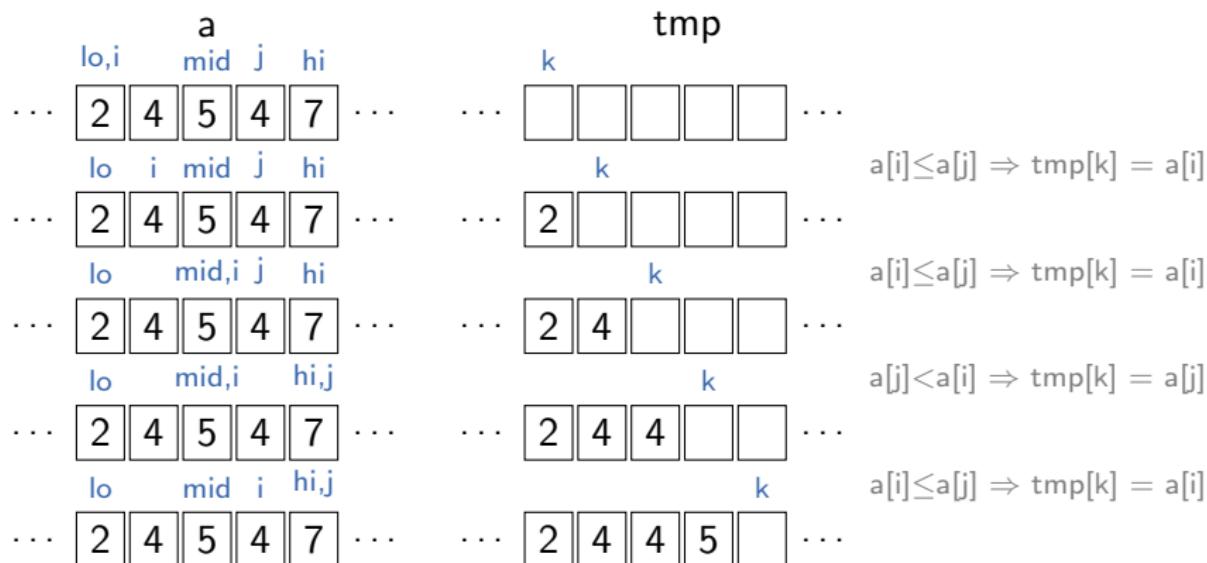
Initialisierung: $i := lo$, $j := mid + 1$, $k := lo$



Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.

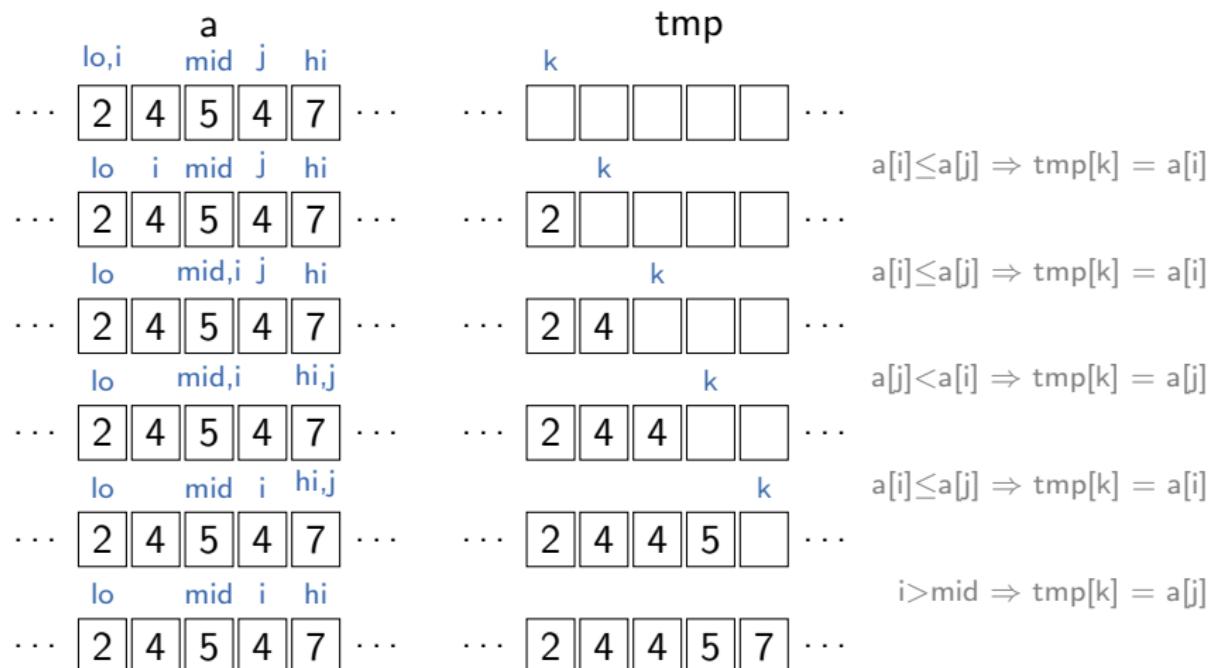
Initialisierung: $i := lo$, $j := mid + 1$, $k := lo$



Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.

Initialisierung: $i := lo$, $j := mid + 1$, $k := lo$



Verbinden der Teillösungen: Algorithmus

```
1 def merge(array, tmp, lo, mid, hi):
2     i = lo
3     j = mid + 1
4     for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo,...,hi
5         if j > hi or (i <= mid and array[i] <= array[j]):
6             tmp[k] = array[i]
7             i += 1
8         else:
9             tmp[k] = array[j]
10            j += 1
11    for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo,...,hi
12        array[k] = tmp[k]
```

Verbinden der Teillösungen: Algorithmus

```
1 def merge(array, tmp, lo, mid, hi):
2     i = lo
3     j = mid + 1
4     for k in range(lo, hi + 1): # k = lo,...,hi
5         if j > hi or (i <= mid and array[i] <= array[j]):
6             tmp[k] = array[i]
7             i += 1
8         else:
9             tmp[k] = array[j]
10            j += 1
11    for k in range(lo, hi + 1): # k = lo,...,hi
12        array[k] = tmp[k]
```

Auch korrekt für $lo = mid = hi$

Mergesort
○○○○

Merge-Schritt
○○○○●○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
○○○○

Zusammenfassung
○○

Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `merge_sort.ipynb`

Mergesort
oooo

Merge-Schritt
ooooo●

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
oooo

Zusammenfassung
oo

Questions



Questions?

Mergesort
oooo

Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
●oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
oooo

Zusammenfassung
oo

Top-Down-Mergesort

Mergesort
oooo

Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
o●oooooo

Bottom-Up-Mergesort
oooo

Zusammenfassung
oo

Mergesort: Algorithmus

rekursive Top-Down-Version

```
1 def sort(array):
2     tmp = [0] * len(array)  # [0,...,0] with same size as array
3     sort_aux(array, tmp, 0, len(array) - 1)
4
5 def sort_aux(array, tmp, lo, hi):
6     if hi <= lo:
7         return
8     mid = lo + (hi - lo) // 2
9     # //: Division mit Abrunden
10    sort_aux(array, tmp, lo, mid)
11    sort_aux(array, tmp, mid + 1, hi)
12    merge(array, tmp, lo, mid, hi)
```

Mergesort
oooo

Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oo●ooooo

Bottom-Up-Mergesort
oooo

Zusammenfassung
oo

Mögliche Verbesserungen

- Auf kurzen Sequenzen ist Insertionsort schneller als Mergesort
→ verwende Insertionsort wenn `hi - lo` klein

Mergesort
oooo

Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
o●ooooo

Bottom-Up-Mergesort
oooo

Zusammenfassung
oo

Mögliche Verbesserungen

- Auf kurzen Sequenzen ist Insertionsort schneller als Mergesort
→ verwende Insertionsort wenn `hi - lo` klein
- Breche Merge-Schritt direkt ab, falls Positionen `lo` bis `hi` bereits vollständig sortiert

```
if array[mid] <= array[mid + 1]:  
    return
```

Mögliche Verbesserungen

- Auf kurzen Sequenzen ist Insertionsort schneller als Mergesort
→ verwende Insertionsort wenn `hi - lo` klein
- Breche Merge-Schritt direkt ab, falls Positionen `lo` bis `hi` bereits vollständig sortiert

```
if array[mid] <= array[mid + 1]:  
    return
```

- Kopieren von `tmp`-Ergebnis in `merge` kostet Zeit
→ tausche Rolle von `array` und `tmp`
bei jedem rekursiven Aufruf

Merge-Schritt: Korrektheit

- **Invariante:** Am Ende jeder Schleifeniteration ist
 - $\text{tmp}[k] \leq \text{array}[m]$ für alle $i \leq m \leq \text{mid}$, und
 - $\text{tmp}[k] \leq \text{array}[n]$ für alle $j \leq n \leq \text{hi}$.
- tmp wird von vorne nach hinten beschrieben.
- Nach letzter Schleifeniteration gilt für alle $\text{lo} \leq r < s \leq \text{hi}$, dass $\text{tmp}[r] \leq \text{tmp}[s]$ (= Bereich ist sortiert).

Mergesort: Korrektheit

`sort_aux:`

- Induktionsbeweis über Bereichslänge $hi - lo$
- Basis $hi - lo = -1$: leerer Bereich ist sortiert.
- Basis $hi - lo = 0$: Bereich mit nur einem Element ist sortiert.

Mergesort: Korrektheit

`sort_aux:`

- Induktionsbeweis über Bereichslänge $hi - lo$
- Basis $hi - lo = -1$: leerer Bereich ist sortiert.
- Basis $hi - lo = 0$: Bereich mit nur einem Element ist sortiert.
- Induktionshypothese: Mergesort ist korrekt für alle $hi - lo < m$
- Induktionsschritt ($m - 1 \rightarrow m$):

Mergesort: Korrektheit

sort_aux:

- Induktionsbeweis über Bereichslänge $hi - lo$
- Basis $hi - lo = -1$: leerer Bereich ist sortiert.
- Basis $hi - lo = 0$: Bereich mit nur einem Element ist sortiert.
- Induktionshypothese: Mergesort ist korrekt für alle $hi - lo < m$
- Induktionsschritt ($m - 1 \rightarrow m$):

Mergesort macht zwei rekursive Aufrufe mit

$hi - lo \leq m/2 + 1$, danach ist die Eingabe jeweils zwischen lo und mid und zwischen $mid + 1$ und hi sortiert (lt. Ind.-hyp).

Mergesort: Korrektheit

sort_aux:

- Induktionsbeweis über Bereichslänge $hi - lo$
- Basis $hi - lo = -1$: leerer Bereich ist sortiert.
- Basis $hi - lo = 0$: Bereich mit nur einem Element ist sortiert.
- Induktionshypothese: Mergesort ist korrekt für alle $hi - lo < m$
- Induktionsschritt ($m - 1 \rightarrow m$):

Mergesort macht zwei rekursive Aufrufe mit

$hi - lo \leq m/2 + 1$, danach ist die Eingabe jeweils zwischen lo und mid und zwischen $mid + 1$ und hi sortiert (lt. Ind.-hyp).

Wir wissen bereits, dass der Merge-Schritt korrekt ist, also ist am Ende der gesamte Bereich zwischen lo und hi sortiert.

Mergesort: Korrektheit

`sort_aux`:

- Induktionsbeweis über Bereichslänge $hi - lo$
- Basis $hi - lo = -1$: leerer Bereich ist sortiert.
- Basis $hi - lo = 0$: Bereich mit nur einem Element ist sortiert.
- Induktionshypothese: Mergesort ist korrekt für alle $hi - lo < m$
- Induktionsschritt ($m - 1 \rightarrow m$):

Mergesort macht zwei rekursive Aufrufe mit

$hi - lo \leq m/2 + 1$, danach ist die Eingabe jeweils zwischen lo und mid und zwischen $mid + 1$ und hi sortiert (lt. Ind.-hyp).

Wir wissen bereits, dass der Merge-Schritt korrekt ist, also ist am Ende der gesamte Bereich zwischen lo und hi sortiert.

Mergesort: Ruft `sort_aux` für gesamten Bereich auf,
daher ist am Ende die gesamte Eingabe sortiert.

Mergesort: Eigenschaften (slido)

```
1 def sort(array):
2     tmp = [0] * len(array)  # [0,...,0] with same size as array
3     sort_aux(array, tmp, 0, len(array) - 1)
4
5 def sort_aux(array, tmp, lo, hi):
6     if hi <= lo:
7         return
8     mid = lo + (hi - lo) // 2
9     # //: Division mit Abrunden
10    sort_aux(array, tmp, lo, mid)
11    sort_aux(array, tmp, mid + 1, hi)
12    merge(array, tmp, lo, mid, hi)
```

Welche der folgenden Eigenschaften hat Mergesort?
In-place? Adaptiv? Stabil?



Mergesort: Eigenschaften

- **nicht in-place:** verwendet zusätzlichen Speicherplatz für `tmp` und für Aufrufstapel (call stack)
- **Zeitbedarf:** nicht adaptiv (ausser mit Mergeabbruch-Verbesserung)
genauere Analyse: [nächste Woche](#)
- **stabil:** `merge` präferiert `array[i]`, wenn `array[i]` gleich `array[j]`.

Mergesort
oooo

Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo●

Bottom-Up-Mergesort
oooo

Zusammenfassung
oo

Questions



Questions?

Mergesort
○○○○

Merge-Schritt
○○○○○○

Top-Down-Mergesort
○○○○○○○○

Bottom-Up-Mergesort
●○○○

Zusammenfassung
○○

Bottom-Up-Mergesort

Mergesort
oooo

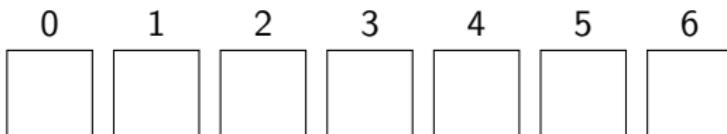
Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
o●oo

Zusammenfassung
oo

Bottom-Up-Version



Mergesort
oooo

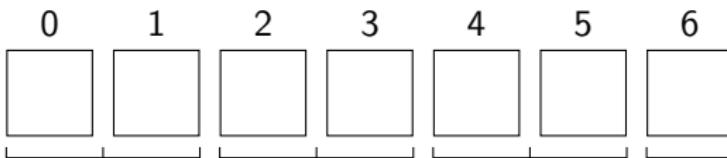
Merge-Schritt
ooooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
o●oo

Zusammenfassung
oo

Bottom-Up-Version



Mergesort
oooo

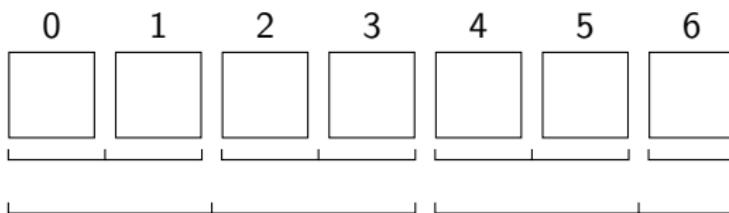
Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
o●oo

Zusammenfassung
oo

Bottom-Up-Version



Mergesort
oooo

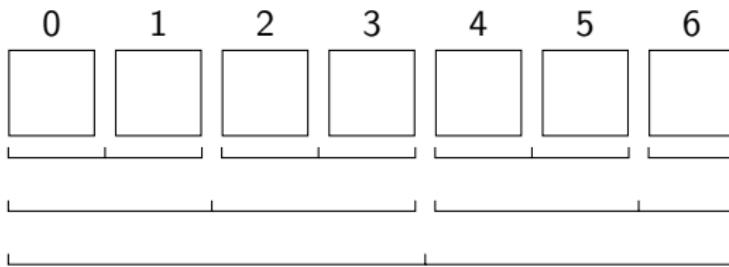
Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
o●oo

Zusammenfassung
oo

Bottom-Up-Version



Mergesort
oooo

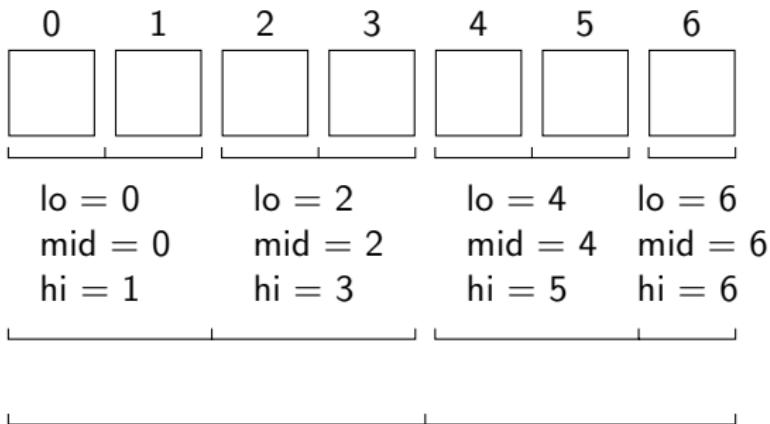
Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
o●oo

Zusammenfassung
oo

Bottom-Up-Version



Mergesort
oooo

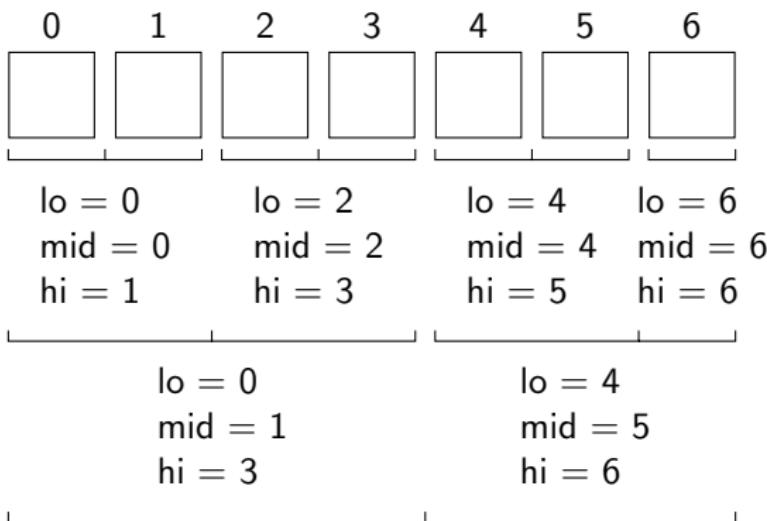
Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
o●oo

Zusammenfassung
oo

Bottom-Up-Version



Mergesort
oooo

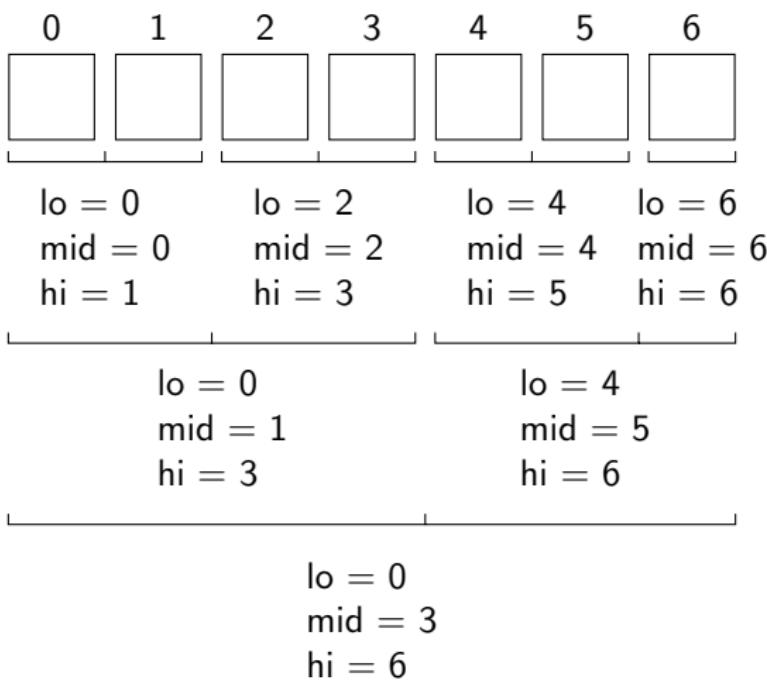
Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
o●oo

Zusammenfassung
oo

Bottom-Up-Version



Mergesort
oooo

Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
ooo○

Zusammenfassung
oo

Bottom-Up-Mergesort: Algorithm

iterative Bottom-Up-Version

```
1 def sort(array):
2     n = len(array)
3     tmp = [0] * n
4     length = 1
5     while length < n:
6         lo = 0
7         while lo < n - length:
8             mid = lo + length - 1
9             hi = min(lo + 2 * length - 1, n - 1)
10            merge(array, tmp, lo, mid, hi)
11            lo += 2 * length
12            length *= 2
```

Mergesort
oooo

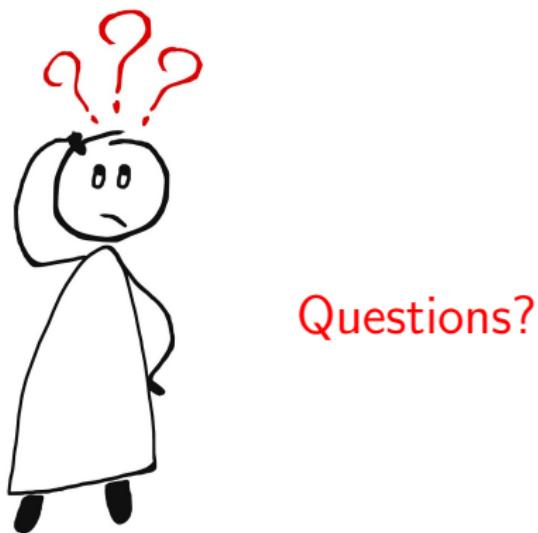
Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
ooo●

Zusammenfassung
oo

Questions



Mergesort
oooo

Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
oooo

Zusammenfassung
●○

Zusammenfassung

Mergesort
oooo

Merge-Schritt
oooooo

Top-Down-Mergesort
oooooooo

Bottom-Up-Mergesort
oooo

Zusammenfassung
oo

Zusammenfassung

- Mergesort ist ein **Teile-und-Herrsche-Verfahren**, das den zu sortierenden Bereich in zwei etwa gleich grosse Bereiche teilt.
- Der **Merge-Schritt** führt zwei bereits sortierte Teilbereiche zusammen.
- Mergesort ist **stabil**, arbeitet aber **nicht in-place**.
- Die **Top-Down-Variante** ist ein **rekursives Verfahren**.
- Die **Bottom-Up-Variante** ist ein **iteratives Verfahren**.