

# Algorithmen und Datenstrukturen

## A4. Sortieren II: Mergesort

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

4./10. März 2021

# Algorithmen und Datenstrukturen

4./10. März 2021 — A4. Sortieren II: Mergesort

A4.1 Mergesort

A4.2 Merge-Schritt

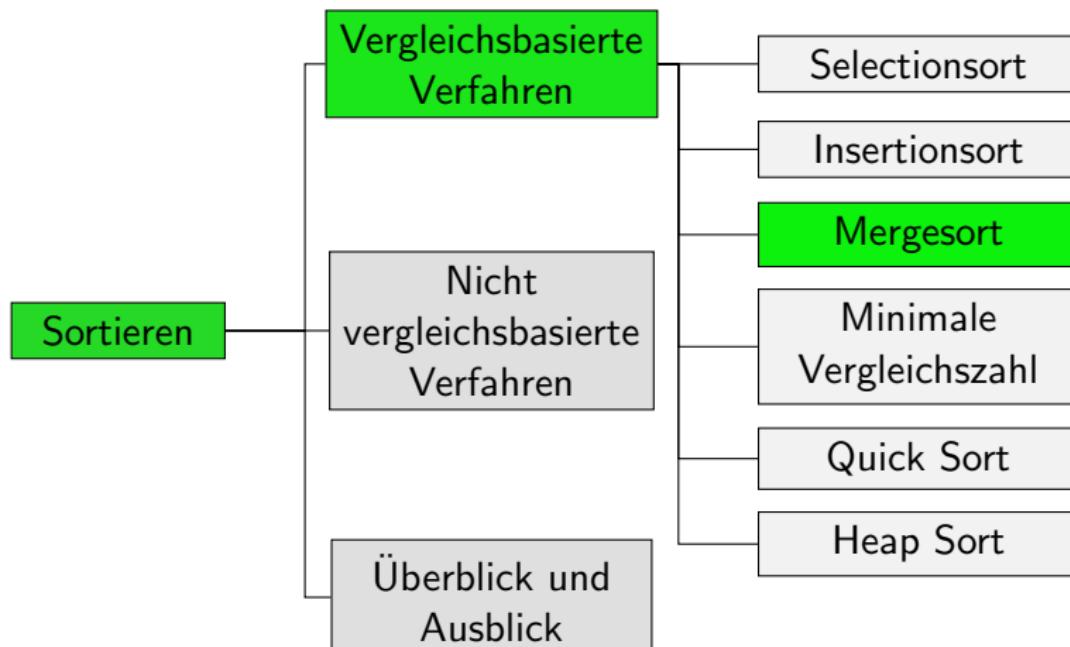
A4.3 Top-Down-Mergesort

A4.4 Bottom-Up-Mergesort

A4.5 Zusammenfassung

## A4.1 Mergesort

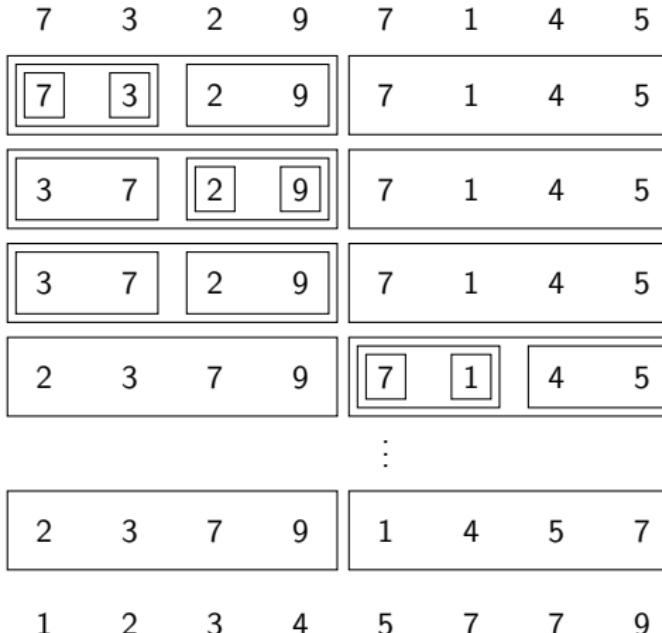
# Sortierverfahren



## Mergesort: Idee

- ▶ **Beobachtung:** zwei bereits sortierte Sequenzen lassen sich leicht zu einer sortierten Sequenz vereinen.
- ▶ Sequenzen mit einem oder keinem Element sind sortiert.
- ▶ **Idee** für längere Sequenzen:
  - ▶ Teile Eingabesequenz in zwei etwa gleich grosse Teilbereiche
  - ▶ Rekursiver Aufruf für beide Teilbereiche
  - ▶ Füge nun sortierte Teilbereiche zusammen.
- ▶ **Teile-und-Herrsche-Ansatz** (divide and conquer)

# Mergesort: Illustration



(Detaillierte Animation in Bildschirm-Version der Folien)

## A4.2 Merge-Schritt

## Verbinden der Teillösungen

- ▶ Indizes  $lo \leq mid < hi$
- ▶ Annahme:  $array[lo]$  bis  $array[mid]$  und  $array[mid+1]$  bis  $array[hi]$  sind bereits sortiert
- ▶ Ziel:  $array[lo]$  bis  $array[hi]$  ist sortiert
- ▶ Idee: gehe parallel von vorne nach hinten durch beide Teilbereiche und sammle das jeweils kleinere Element auf
- ▶ Verwendet zusätzlichen Speicher für aufgesammelte Werte

# Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.

Initialisierung:  $i := \text{lo}$ ,  $j := \text{mid} + 1$ ,  $k := \text{lo}$

$\text{lo}, i$	$a$	$\text{mid}$	$j$	$\text{hi}$	$\dots$	$\dots$	$\text{tmp}$	$\text{k}$	$\dots$	$\dots$
2	4	5	4	7	...	...	2	4	5	6
lo	i	mid	j	hi	...	...	2	4	5	6
2	4	5	4	7	...	...	2	4	5	6
lo	mid	i	j	hi	...	...	2	4	5	6
2	4	5	4	7	...	...	2	4	5	6
lo	mid	i	hi,j	...	...	2	4	4	5	6
2	4	5	4	7	...	...	2	4	4	5
lo	mid	i	hi,j	...	...	2	4	4	5	6
2	4	5	4	7	...	...	2	4	4	5
lo	mid	i	hi	...	...	2	4	4	5	7
2	4	5	4	7	...	...	2	4	4	5

$a[i] \leq a[j] \Rightarrow \text{tmp}[k] = a[i]$

$a[i] \leq a[j] \Rightarrow \text{tmp}[k] = a[i]$

$a[j] < a[i] \Rightarrow \text{tmp}[k] = a[j]$

$a[i] \leq a[j] \Rightarrow \text{tmp}[k] = a[i]$

$i > \text{mid} \Rightarrow \text{tmp}[k] = a[j]$

# Verbinden der Teillösungen: Algorithmus

---

```
1 def merge(array, tmp, lo, mid, hi):
2     i = lo
3     j = mid + 1
4     for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo, ..., hi
5         if j > hi or (i <= mid and array[i] <= array[j]):
6             tmp[k] = array[i]
7             i += 1
8         else:
9             tmp[k] = array[j]
10            j += 1
11     for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo, ..., hi
12         array[k] = tmp[k]
```

---

Auch korrekt für  $lo = mid = hi$

# Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `merge_sort.ipynb`

## A4.3 Top-Down-Mergesort

# Mergesort: Algorithmus

## rekursive Top-Down-Version

---

```
1 def sort(array):  
2     tmp = [0] * len(array)  # [0,...,0] with same size as array  
3     sort_aux(array, tmp, 0, len(array) - 1)  
4  
5 def sort_aux(array, tmp, lo, hi):  
6     if hi <= lo:  
7         return  
8     mid = lo + (hi - lo) // 2  
9     # //: Division mit Abrunden  
10    sort_aux(array, tmp, lo, mid)  
11    sort_aux(array, tmp, mid + 1, hi)  
12    merge(array, tmp, lo, mid, hi)
```

---

## Mögliche Verbesserungen

- ▶ Auf kurzen Sequenzen ist Insertionsort schneller als Mergesort  
→ verwende Insertionsort wenn  $hi - lo$  klein
- ▶ Breche Merge-Schritt direkt ab, falls Positionen  $lo$  bis  $hi$  bereits vollständig sortiert

```
if array[mid] <= array[mid + 1]:  
    return
```

- ▶ Kopieren von  $tmp$ -Ergebnis in  $merge$  kostet Zeit  
→ tausche Rolle von  $array$  und  $tmp$   
bei jedem rekursiven Aufruf

## Merge-Schritt: Korrektheit

- ▶ **Invariante:** Am Ende jeder Schleifeniteration ist
  - ▶  $\text{tmp}[k] \leq \text{array}[m]$  für alle  $i \leq m \leq \text{mid}$ , und
  - ▶  $\text{tmp}[k] \leq \text{array}[n]$  für alle  $j \leq n \leq \text{hi}$ .
- ▶  $\text{tmp}$  wird von vorne nach hinten beschrieben.
- ▶ Nach letzter Schleifeniteration gilt für alle  $\text{lo} \leq r < s \leq \text{hi}$ , dass  $\text{tmp}[r] \leq \text{tmp}[s]$  (= Bereich ist sortiert).

## Mergesort: Korrektheit

`sort_aux`:

- ▶ Induktionsbeweis über Bereichslänge  $hi - lo$
- ▶ Basis  $hi - lo = -1$ : leerer Bereich ist sortiert.
- ▶ Basis  $hi - lo = 0$ : Bereich mit nur einem Element ist sortiert.
- ▶ Induktionshypothese: Mergesort ist korrekt für alle  $hi - lo < m$
- ▶ Induktionsschritt ( $m - 1 \rightarrow m$ ):

Mergesort macht zwei rekursive Aufrufe mit

$hi - lo \leq m/2 + 1$ , danach ist die Eingabe jeweils zwischen  $lo$  und  $mid$  und zwischen  $mid + 1$  und  $hi$  sortiert (lt. Ind.-hyp).

Wir wissen bereits, dass der Merge-Schritt korrekt ist, also ist am Ende der gesamte Bereich zwischen  $lo$  und  $hi$  sortiert.

**Mergesort:** Ruft `sort_aux` für gesamten Bereich auf,  
daher ist am Ende die gesamte Eingabe sortiert.

# Mergesort: Eigenschaften (slido)

---

```
1 def sort(array):  
2     tmp = [0] * len(array)  # [0, ..., 0] with same size as array  
3     sort_aux(array, tmp, 0, len(array) - 1)  
4  
5 def sort_aux(array, tmp, lo, hi):  
6     if hi <= lo:  
7         return  
8     mid = lo + (hi - lo) // 2  
9     # //: Division mit Abrunden  
10    sort_aux(array, tmp, lo, mid)  
11    sort_aux(array, tmp, mid + 1, hi)  
12    merge(array, tmp, lo, mid, hi)
```

---

Welche der folgenden Eigenschaften hat Mergesort?  
In-place? Adaptiv? Stabil?

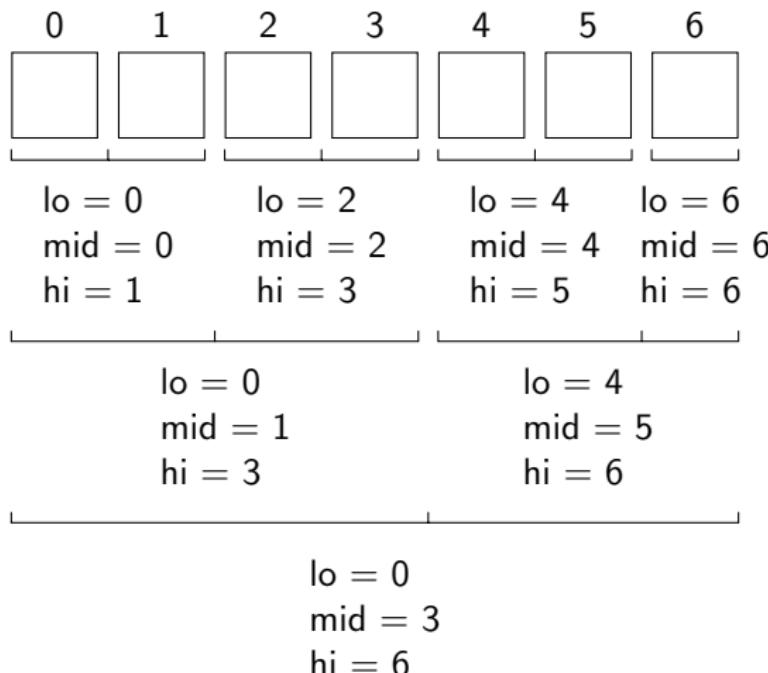


## Mergesort: Eigenschaften

- ▶ **nicht in-place**: verwendet zusätzlichen Speicherplatz für `tmp` und für Aufrufstapel (call stack)
- ▶ **Zeitbedarf**: nicht adaptiv (ausser mit Mergeabbruch-Verbesserung)  
genauere Analyse: nächste Woche
- ▶ **stabil**: `merge` präferiert `array[i]`, wenn `array[i]` gleich `array[j]`.

## A4.4 Bottom-Up-Mergesort

## Bottom-Up-Version



# Bottom-Up-Mergesort: Algorithm

## iterative Bottom-Up-Version

---

```
1 def sort(array):  
2     n = len(array)  
3     tmp = [0] * n  
4     length = 1  
5     while length < n:  
6         lo = 0  
7         while lo < n - length:  
8             mid = lo + length - 1  
9             hi = min(lo + 2 * length - 1, n - 1)  
10            merge(array, tmp, lo, mid, hi)  
11            lo += 2 * length  
12            length *= 2
```

---

## A4.5 Zusammenfassung

# Zusammenfassung

- ▶ Mergesort ist ein **Teile-und-Herrsche-Verfahren**, das den zu sortierenden Bereich in zwei etwa gleich grosse Bereiche teilt.
- ▶ Der **Merge-Schritt** führt zwei bereits sortierte Teilbereiche zusammen.
- ▶ Mergesort ist **stabil**, arbeitet aber **nicht in-place**.
- ▶ Die **Top-Down-Variante** ist ein **rekursives Verfahren**.
- ▶ Die **Bottom-Up-Variante** ist ein **iteratives Verfahren**.