Theorie der Informatik

G. Röger
F. Pommerening
Frühjahrssemester 2020

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 12 — Lösungen

Aufgabe 12.1 (Polynomielle Reduktion; 3 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Entscheidungsprobleme:

HittingSet:

- *Gegeben:* endliche Menge M, Menge von Mengen $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq M$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, eine natürlich Zahl $k \in \mathbb{N}_0$
- *Gefragt:* Gibt es eine Menge H mit höchstens k Elementen, die aus jeder Menge aus $\mathcal{S}$ mindestens ein Element enthält?

  Formal: Gibt es eine Menge H mit $|H| \leq k$ und $H \cap S_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$?

VertexCover:

- *Gegeben:* ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$, natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$
- *Gefragt:* Enthält G eine Knotenüberdeckung der Grösse k oder weniger, d. h., eine Knotenmenge $C \subseteq V$ mit $|C| \leq k$ und $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$ für alle $\{u, v\} \in E$?

Beweisen Sie, dass HittingSet NP-hart ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass das Problem VertexCover NP-vollständig ist.

Lösung:
Wir müssen zeigen, dass VertexCover $\leq_\mathrm{p}$ HittingSet. Hierzu definieren wir $f(\langle\langle V, E\rangle, k\rangle) = \langle V, E, k\rangle$. Die Funktion f ist offensichtlich total und lässt sich in polynomieller Zeit berechnen.
Wir müssen noch zeigen: $G = \langle V, E \rangle$ hat eine Knotenüberdeckung der Grösse $\leq k$ genau dann, wenn es ein hitting set der Grösse $\leq k$ gibt, dass alle Mengen in E trifft:

- Eine Knotenüberdeckung C von G ist ein hitting set für E weil sie ein Element aus jeder Menge aus E trifft (= ein Endpunkt jeder Kante). Ausserdem gilt, wenn die Überdeckung das Grössenlimit der VertexCover-Instanz erfüllt, dann erfüllt es trivialerweise auch das (gleiche) Grössenlimit der HittingSet-Instanz.
- Sei H ein hitting set von E. Weil wir nicht explizit fordern, dass $H \subseteq M$, entfernen wir alle Elemente die nicht in $M = V$ sind, was die Menge nur kleiner machen kann. H enthält ein Element aus jeder Menge in E, was bedeutet, dass es alle Knoten des Graphen überdeckt und daher eine Knotenüberdeckung von G ist. Wir sehen also, dass es ein hitting set mit höchstens k Elementen gibt, wenn es eine Knotenüberdeckung von dieser Grösse gibt.

Insgesamt ist f also total, polynomiell berechenbar, und erfüllt die Reduktionseigenschaft, zeigt also, dass VertexCover $\leq_\mathrm{p}$ HittingSet. Da VertexCover NP-vollständig und daher NP-hart ist, muss auch HittingSet NP-hart sein.

Aufgabe 12.2 (Polynomielle Reduktion; 4 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Entscheidungsprobleme:

IndSet:

- *Gegeben:* ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$, natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$

- *Gefragt:* Enthält G eine unabhängige Menge der Grösse k oder mehr, d.h. eine Knotenmenge $I \subseteq V$ mit $|I| \geq k$ und $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in I$?

Hence, if there is such a hitting set of size at most k, there is a vertex cover of the required size.
SetPacking:

- *Gegeben:* endliche Menge M, Menge von Mengen $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq M$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$
- *Gefragt:* Gibt es $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ mit $|\mathcal{S}'| \geq k$, so dass alle Mengen in $\mathcal{S}'$ paarweise disjunkt sind, d.h. für alle $S_i, S_j \in \mathcal{S}'$ mit $S_i \neq S_j$ gilt $S_i \cap S_j = \emptyset$?

Beweisen Sie, dass SetPacking NP-hart ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass IndSet NP-vollständig ist.

Lösung:

Wir müssen zeigen, dass IndSet $\leq_\mathrm{p}$ SetPacking. Hierzu definieren wir $f(\langle V, E\rangle, k) = \langle E \cup V, \mathcal{S}, k\rangle$ mit $\mathcal{S} = \{S_v \mid v \in V\}$, wobei $S_v = \{e \in E \mid v \in e\} \cup \{v\}$. Die Funktion f ist offensichtlich total und lässt sich in polynomieller Zeit berechnen.
Wir müssen noch zeigen: $\langle V, E\rangle$ enthält eine unabhängige Menge der Grösse $\geq k$ genau dann, wenn $\mathcal{S}$ mindestens k paarweise disjunkte Mengen enthält:

- Für eine unabhängige Menge $I \subseteq V$ gilt für alle $u, v \in I$, dass $\{u, v\} \notin E$. Betrachte die Menge $\mathcal{S}'_I = \{S_u \mid u \in I\}$. Da jedes $v \in V$ nur genau in der Menge S_v vorkommt, besteht $\mathcal{S}'_I$ aus $|I|$ unterschiedlichen Mengen. Wir zeigen durch Widerspruch, dass diese zudem paarweise disjunkt sind:

  Angenommen, es gibt $S_u, S_v \in \mathcal{S}'_I$ mit $S_u \neq S_v$ und es existiert $e \in S_u \cap S_v$. Es gilt $e \in E$ (und damit $|e| = 2$), da jedes $w \in V$ nur in einer Menge vorkommt. Wegen $e \in S_u$ gilt $u \in e$ und wegen $e \in S_v$ gilt $v \in e$. Daraus folgt, dass $\{u, v\} \in E$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass I eine unabhängige Menge ist.

- Sei $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ eine Menge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt für alle $S_u, S_v \in \mathcal{S}'$ mit $S_u \neq S_v$ (und damit $u \neq v$), dass es kein e gibt mit $u \in e$ und $v \in e$, und somit $\{u, v\} \notin E$. Daher ist $\{v \mid S_v \in \mathcal{S}'\}$ eine unabhängige Menge der Grösse $|\mathcal{S}'|$ in $\langle V, E\rangle$.

Insgesamt ist f also total, polynomiell berechenbar, und erfüllt die Reduktionseigenschaft, zeigt also, dass IndSet $\leq_\mathrm{p}$ SetPacking. Da IndSet NP-vollständig und daher NP-hart ist, muss auch SetPacking NP-hart sein.

Aufgabe 12.3 (Entscheidbarbeit und NP; 3 Punkte)

Beweisen Sie, dass keine unentscheidbare Sprache in NP liegen kann.

Lösung:

Betrachen wir eine Sprache L in NP. Nach Definition von NP gibt es eine NTM M_L, die L in polynomieller (also endlicher) Zeit akzeptiert. Diese NTM kann von einer DTM M'_L in exponentieller (aber immer noch endlicher) Zeit simuliert werden (siehe Folien E2.10). Damit können wir eine DTM angeben, welche die characteristische Funktion von L berechnet: wir simulieren M'_L auf der Eingabe w und geben dann 1 aus, wenn M'_L das Wort w akzepiert und 0 sonst. Der kritische Schritt dabei ist, dass die Simulation von M'_L auf jeden Fall (nach exponentieller aber endlicher Zeit) terminiert. Da die characteristische Funktion von L berechenbar ist, ist L entscheidbar.