Theorie der Informatik

G. Röger
F. Pommerening
Frühjahrssemester 2020

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 10 — Lösungen

Aufgabe 10.1 (Transitivität von Reduktionen; 2 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C: Wenn $A \leq B$ und $B \leq C$, dann auch $A \leq C$.

Lösung:

Sei $A \subseteq \Sigma_A^*$, $B \subseteq \Sigma_B^*$ und $C \subseteq \Sigma_C^*$. Da $A \leq B$, gibt es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma_A^* \to \Sigma_B^*$, so dass $x \in A$ gdw. $f(x) \in B$. Aus $B \leq C$ folgt analog, dass es eine Funktion $g : \Sigma_B^* \to \Sigma_C^*$ gibt, so dass $x \in B$ gdw. $g(x) \in C$.
Wir definieren $h : \Sigma_A^* \to \Sigma_C^*$ als $g \circ f$ (d.h. $h(x) = g(f(x))$ für alle $x \in \Sigma_A^*$). Die Funktion ist total und berechenbar, da die Komposition von totalen und berechenbaren Funktionen wieder total und berechenbar ist. Insgesamt gilt dann, dass $x \in A$ gdw. $f(x) \in B$ gdw. $g(f(x)) \in C$ gdw. $h(x) \in C$. Wir schliessen daraus, dass A (mit h) auf C reduzierbar ist: $A \leq C$.

Aufgabe 10.2 (Unentscheidbarkeit; 3 Punkte)

Geben Sie in jedem Aufgabenteil ein Beispiel für eine Sprache L_i mit den genannten Eigenschaften (ohne Begründung), oder erklären Sie warum keine solche Sprache existiert (mit kurzer Begründung).

(a) L_1 ist unentscheidbar und L_1 und $\overline{L_1}$ sind semi-entscheidbar.

(b) L_2 ist eine Typ-0-Sprache und entscheidbar.

(c) L_3 ist eine Typ-0-Sprache und unentscheidbar.

Lösung:

(a) Unmöglich: wenn eine Sprache und ihr Komplement semi-entscheidbar sind, dann ist die Sprache entscheidbar. Wir können zum Beispiel die Berechnungsschritte der beiden Semi-Entscheidungsverfahren abwechselnd ausführen (sogenanntes „dove-tailing“).

(b) Zum Beispiel eine beliebige reguläre Sprache, wie $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \mid n, m \geq 0\}$.

(c) Jede semi-entscheidbare (und daher Typ-0) aber unentscheidbare Sprache, zum Beispiel das Halteproblem.

Aufgabe 10.3 (Satz von Rice; 2 Punkte)

Bei welchen der folgenden Sprachen zeigt der Satz von Rice, dass die Sprache unentscheidbar ist? Geben Sie für Sprachen, bei denen der Satz von Rice verwendet werden kann, jeweils die Teilmenge von Turing-berechenbaren Funktionen $\mathcal{S}$ an, für die Sie den Satz anwenden.
Hinweis: Sie müssen keine Beweise angeben. Wenn der Satz von Rice anwendbar ist, geben Sie die Menge $\mathcal{S}$ an. Andernfalls geben Sie eine kurze Begründung (1 Satz) an, warum der Satz von Rice nicht anwendbar ist.

(a) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält für keine Eingabe mit einer gültigen Ausgabe } \}$

(b) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ berechnet die Nachfolgerfunktion oder Vorgängerfunktion } \}$

(c) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ benötigt eine gerade Anzahl von Schritten auf der Eingabe } \mathtt{0011} \}$

(d) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{Keine Eingabe von } M_w \text{ führt zu einer gültigen Ausgabe, die } \mathtt{0} \text{ enthält } \}$

Lösung:

(a) Der Satz von Rice ist mit der Funktionsmenge $\mathcal{S} = \{\Omega\}$ anwendbar, wobei Ω die überall undefinierte Funktion ist.

(b) Der Satz von Rice ist mit der Funktionsmenge $\mathcal{S} = \{\mathit{succ}, \mathit{pred}\}$ anwendbar.

(c) Der Satz von Rice ist nicht direkt anwendbar, da es sich bei der Anzahl von Berechnungsschritten nicht um eine Eigenschaft der berechneten Funktion handelt.

(d) Der Satz von Rice ist mit der folgenden Funktionsmenge anwendbar:

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{R} \mid \text{für alle } x \in \{0,1\}^* \text{ ist } f(x) \text{ entweder undefiniert oder enthält keine } \texttt{0}\}$$

Aufgabe 10.4 (Unentscheidbare Grammatik-Probleme; 1.5+1.5 Punkte)
Das *Leerheitsproblem*, das *Äquivalenzproblem* und das *Schnittproblem* für allgemeine Grammatiken sind definiert als:

- LEERHEIT: Gegeben eine allgemeine Grammatik G, ist $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?
- ÄQUIVALENZ: Gegeben zwei allgemeine Grammatiken G_1 und G_2, ist $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$?
- SCHNITT: Gegeben zwei allgemeine Grammatiken G_1 und G_2, gilt $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$?

Sie können ohne Beweis verwenden, dass LEERHEIT unentscheidbar ist. (Als Bonusaufgabe können Sie diese Aussage auch mit dem Staz von Rice beweisen.)

(a) Beweisen Sie, dass ÄQUIVALENZ unentscheidbar ist, indem Sie LEERHEIT darauf reduzieren.

Lösung:

Sei $G_\emptyset$ eine beliebige Grammatik mit $\mathcal{L}(G_\emptyset) = \emptyset$, z.B. eine Grammatik ohne Regeln. Sei f die Funktion mit $f(G) = (G, G_\emptyset)$ für alle G. Dann gilt:

$$\begin{aligned} G \in \textsc{Leerheit} \text{ gdw. } & \mathcal{L}(G) = \emptyset \\ \text{gdw. } & \mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_\emptyset) \\ \text{gdw. } & (G, G_\emptyset) \in \textsc{Äquivalenz} \\ \text{gdw. } & f(G) \in \textsc{Äquivalenz} \end{aligned}$$

Die Funktion f ist total und berechenbar und reduziert LEERHEIT auf ÄQUIVALENZ. Da LEERHEIT unentscheidbar ist, ist auch ÄQUIVALENZ unentscheidbar.

(b) Beweisen Sie, dass SCHNITT unentscheidbar ist, indem Sie LEERHEIT darauf reduzieren.

Lösung:

Für das Alphabet Σ sei G_{Σ^*} eine Grammatik mit $\mathcal{L}(G_{\Sigma^*}) = \Sigma^*$. Sei f die Funktion mit $f(G) = (G, G_{\Sigma^*})$ für alle G und Σ, wobei G eine Grammatik mit dem Alphabet Σ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} G \in \textsc{Leerheit} \text{ gdw. } & \mathcal{L}(G) = \emptyset \\ \text{gdw. } & \mathcal{L}(G) \cap \Sigma^* = \emptyset \\ \text{gdw. } & (G, G_{\Sigma^*}) \in \textsc{Schnitt} \\ \text{gdw. } & f(G) \in \textsc{Schnitt} \end{aligned}$$

Die Funktion f ist total und berechenbar und reduziert LEERHEIT auf SCHNITT. Da LEERHEIT unentscheidbar ist, ist auch SCHNITT unentscheidbar.