

Theorie der Informatik

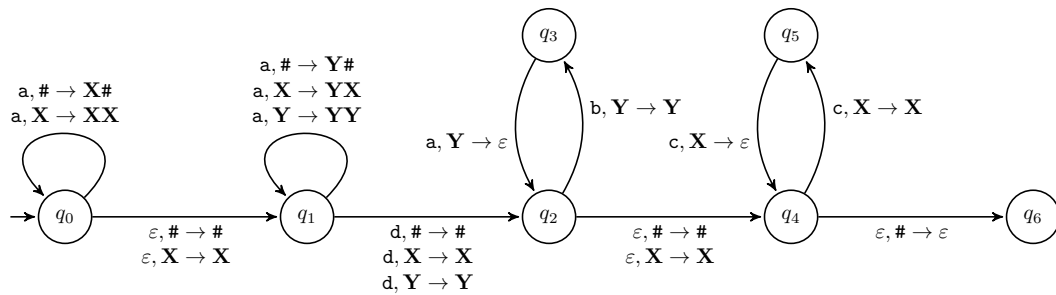
G. Röger
Frühjahrssemester 2020

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 7 — Lösungen

Aufgabe 7.1 (Kellerautomaten; 2+2 Punkte)

Betrachten Sie den Kellerautomaten (PDA) $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \# \rangle$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$, $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{X, Y, \#\}$ und der folgenden Überföhrungsfunktion δ :



- (a) Zeigen Sie, dass der Automat das Wort $aaadbabacc$ akzeptiert, indem Sie eine akzeptierende Sequenz von Konfigurationen angeben.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \langle q_0, aaadbabacc, \# \rangle &\vdash_M \langle q_0, aadbabacc, X\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_1, aadbabacc, X\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_1, adbabacc, YX\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_1, dbabacc, YYX\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_2, babacc, YYX\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_3, abacc, YYX\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_2, bacc, YX\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_3, acc, YX\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_2, cc, X\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_4, cc, X\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_5, c, X\# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_4, \varepsilon, \# \rangle \\
 &\vdash_M \langle q_6, \varepsilon, \varepsilon \rangle
 \end{aligned}$$

- (b) Welche Sprache akzeptiert dieser Automat?

Lösung:

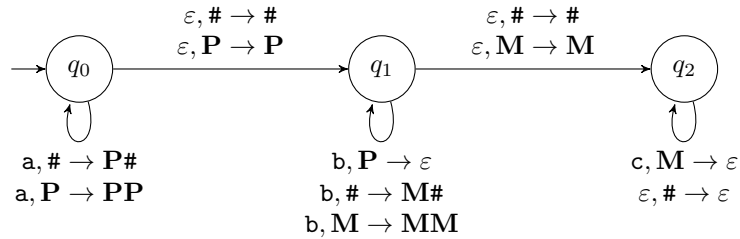
$$\mathcal{L}(M) = \{a^i a^j d (ba)^j c^{2i} \in \Sigma^* \mid i, j \geq 0\}$$

Aufgabe 7.2 (Kellerautomaten; 2 Punkte)

Betrachte Sprache $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, j = i + k\}$. Geben Sie einen Kellerautomaten (PDA) an, der L akzeptiert. Denken Sie daran eine vollständige Beschreibung mit allen Komponenten anzugeben. Die Transitionsfunktion δ können Sie als Zustandsdiagramm angeben

Lösung:

$M = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{M, P, \#\}, \delta, q_0, \# \rangle$, wobei δ wie folgt definiert ist:



Bemerkung: Diese Aufgabe war Teil der Klausur im Jahr 2018 und hat dort 5 von 80 Punkten gegeben.

Aufgabe 7.3 (Turingmaschinen; 2 Punkte)

Eine *deterministische* Turing-Maschine $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, E \rangle$ ist definiert wie eine nicht-deterministische Turing-Maschine, aber mit $\delta : (Q \setminus E) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$. Das heisst, für jeden Zustand, der kein Endzustand ist, und jedes Symbol aus Γ gibt es genau eine Transition, die die Veränderung des Zustands und des Bandes und die Bewegung des Kopfes festlegt.

Eine Turingmaschine M , die die Sprache

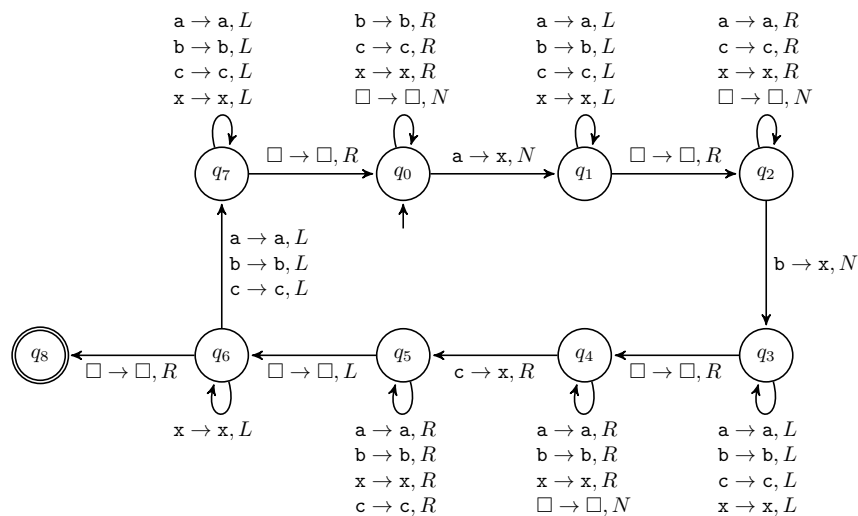
$$L = \{w \in \{a, b, c\}^+ \mid w \text{ enthält gleich viele } a, b \text{ und } c\}$$

akzeptiert, funktioniert mit folgender Schleife:

M sucht ein a auf dem Band und ersetzt es durch ein x . Dann sucht sie ein b auf dem Band und ersetzt es durch x . Dann sucht sie ein c auf dem Band und ersetzt es durch x . Falls sie dabei ein Zeichen nicht findet, geht sie in eine Endlosschleife. Sonst prüft sie, ob alle Zeichen auf dem Band durch x ersetzt wurden. Falls ja, geht sie in einen Endzustand über, sonst beginnt sie die Schleife von vorne.

Geben Sie ein Zustandsdiagramm für eine *deterministische* Turingmaschine mit dem beschriebenen Verhalten an. Erklären Sie ihre Lösung, indem sie beschreiben welcher Teil der Turingmaschine für welchen Teil der Schleife zuständig ist.

Lösung:



Zustand q_0 startet am Anfang der Eingabe und liest das Wort von links nach rechts bis zum ersten **a**. Alle Zeichen bleiben unverändert, und das erste **a** wird durch ein **x** ersetzt, wobei die TM in Zustand q_2 übergeht. Wenn Zustand q_0 am Ende des Wortes angekommen ist, ohne ein **a** zu sehen, bleibt die TM für immer in diesem Zustand.

Zustand q_1 bewegt den Lesekopf zurück an den Anfang des Wortes und die TM geht dann in Zustand q_2 über. Dieser funktioniert analog zu q_0 und ersetzt das erste **b** durch ein **x**. Danach bewegt q_3 den Kopf wieder an den Anfang des Wortes (analog zu q_1) und q_4 ersetzt das erste **c** durch ein **x** (analog zu q_0).

Jetzt bewegt q_5 den Kopf ans Ende der Eingabe (analog zu q_1 aber in die andere Richtung). Danach liest der Zustand q_6 das Wort von rechts nach links. Wenn dabei nur **x** gelesen wird, geht die TM danach in den akzeptierenden Zustand q_8 . Anderenfalls geht die TM in Zustand q_7 , der den Kopf wieder an den Wortanfang bewegt (analog zu q_1).