Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2020

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 4 — Lösungen

Aufgabe 4.1 (Prädikatenlogik, 2 + 2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige prädikatenlogische Formeln φ und ψ gilt, dass

$$(\forall x \varphi \lor \forall x \psi) \models \forall x(\varphi \lor \psi).$$

Lösung:

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und α eine Variablenbelegung, so dass $\mathcal{I}, \alpha \models (\forall x \varphi \lor \forall x \psi)$. Von der Semantik der Disjunktion wissen wir, dass $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x \varphi$ oder $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x \psi$.

Fall 1: $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x \varphi$

In diesem Fall gilt für alle Objekte u aus dem Universum $\mathcal{I}, \alpha[x := u] \models \varphi$. Aber dann folgt auch $\mathcal{I}, \alpha[x := u] \models (\varphi \lor \chi)$ für beliebige Formeln χ mit der Semantik der Disjunktion. Mit $\chi := \psi$ erhalten wir $\mathcal{I}, \alpha[x := u] \models (\varphi \lor \psi)$ für alle Objekte u aus dem Universum. Wir folgern mit der Semantik von $\forall$, dass $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x(\varphi \lor \psi)$.

Fall 2: $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x \varphi$

Wir können analog zu Fall 1 argumentieren, dass $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x(\varphi \lor \psi)$.

Damit haben wir gezeigt, dass jedes Model von $(\forall x \varphi \lor \forall x \psi)$ auch ein Model von $\forall x(\varphi \lor \psi)$ ist und wir folgern, dass $(\forall x \varphi \lor \forall x \psi) \models \forall x(\varphi \lor \psi)$.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Äquivalenz im Allgemeinen *nicht* gilt.

$$(\forall x \varphi \lor \forall x \psi) \equiv \forall x(\varphi \lor \psi)$$

Geben Sie ein Gegenbeispiel mit folgender Signatur an:$\mathcal{S} = \langle \{x\}, \{\}, \{\}, \{P, Q\} \rangle$, wobei $ar(P) = ar(Q) = 1$.

Lösung:

Wir betrachten die Interpretation $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ with $U = \{u_1, u_2\}$, $P^{\mathcal{I}} = \{u_1\}$ and $Q^{\mathcal{I}} = \{u_2\}$. Für beliebige Variablenbelegungen α gilt, dass $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x(P(x) \lor Q(x))$ da $\mathcal{I}, \alpha[x := u_1] \models P(x)$ und $\mathcal{I}, \alpha[x := u_2] \models Q(x)$. Allerdings gilt $\mathcal{I}, \alpha \not\models \forall x P(x)$ weil $\mathcal{I}, \alpha[x := u_2] \not\models P(x)$ und – analog – $\mathcal{I}, \alpha \not\models \forall x Q(x)$ weil $\mathcal{I}, \alpha[x := u_1] \not\models Q(x)$. Daher können wir folgern, dass $\mathcal{I}, \alpha \not\models (\forall x P(x) \lor \forall x Q(x))$ und haben ein Beispiel gesehen, in dem ein Model von $\forall x(P(x) \lor Q(x))$ *kein* Model von $(\forall x P(x) \lor \forall x Q(x))$ ist.

Mit $\varphi = P(x)$ and $\psi = Q(x)$ sehen wir, dass es auch im Allgemeinen nicht der Fall ist, dass $\forall x(\varphi \lor \psi) \models (\forall x \varphi \lor \forall x \psi)$, also kann die logische Äquivalenz im Allgemeinen nicht stimmen.

Aufgabe 4.2 (Prädikatenlogik, 1 Punkt)

Bringen Sie folgende Formel durch Äquivalenzumformungen in Negationsnormalform, indem Sie die Negationssymbole mit den DeMorganschen Regeln oder den Äquivalenzen $\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$ und $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$ nach innen schieben oder mit der Doppelnegation eliminieren.

$$\varphi = \neg \forall x((P(x) \lor \neg Q(x, \mathrm{c})) \land \exists y(P(x) \to Q(y, x)))$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \neg\forall x((P(x) \vee \neg Q(x, \mathrm{c})) \wedge \exists y(P(x) \to Q(y, x))) \\
&\equiv \exists x \neg((P(x) \vee \neg Q(x, \mathrm{c})) \wedge \exists y(P(x) \to Q(y, x))) \\
&\equiv \exists x(\neg(P(x) \vee \neg Q(x, \mathrm{c})) \vee \neg\exists y(P(x) \to Q(y, x))) \\
&\equiv \exists x((\neg P(x) \wedge \neg\neg Q(x, \mathrm{c})) \vee \neg\exists y(P(x) \to Q(y, x))) \\
&\equiv \exists x((\neg P(x) \wedge Q(x, \mathrm{c})) \vee \neg\exists y(P(x) \to Q(y, x))) \\
&\equiv \exists x((\neg P(x) \wedge Q(x, \mathrm{c})) \vee \forall y\neg(P(x) \to Q(y, x))) \\
&\equiv \exists x((\neg P(x) \wedge Q(x, \mathrm{c})) \vee \forall y\neg(\neg P(x) \vee Q(y, x))) \\
&\equiv \exists x((\neg P(x) \wedge Q(x, \mathrm{c})) \vee \forall y(\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(y, x))) \\
&\equiv \exists x((\neg P(x) \wedge Q(x, \mathrm{c})) \vee \forall y(P(x) \wedge \neg Q(y, x)))
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.3 (Formale Sprachen und Grammatiken, 1+3+1 Punkte)
Betrachten Sie folgende Sprache über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$:

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{c}^{2n} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$

(a) Ist ε ein Element von L? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Ja, L enthält das Wort $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{c}^{2n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ insbesondere für $n = 0$ und $m = 0$ das Wort $\mathtt{a}^0\mathtt{b}^0\mathtt{c}^{2\cdot 0} = \mathtt{a}^0\mathtt{b}^0\mathtt{c}^0 = \varepsilon$.

(b) Geben Sie eine *vollständige Beschreibung* einer Grammatik G an, die L erzeugt (also mit $\mathcal{L}(G) = L$). Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = \langle\Sigma, V, P, S\rangle$, denken Sie daran alle Komponenten des Tupels zu definieren.

Lösung:

$G = (\Sigma, V, P, S)$ mit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $V = \{\mathrm{S}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ und den folgenden Regeln in der Menge P:

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{S} \to \varepsilon & \mathrm{S} \to \mathrm{ACC} & \mathrm{S} \to \mathrm{B} & \mathrm{ACC} \to \mathrm{AACCCC} & \mathrm{ACC} \to \mathrm{ABCC} & \mathrm{B} \to \mathrm{BB} \\
\mathrm{A} \to \mathtt{a} & \mathrm{B} \to \mathtt{b} & \mathrm{C} \to \mathtt{c} & & &
\end{array}$$

(c) In welchen Typen (in der Chomsky-Hierarchie) liegt Ihre Grammatik? Sie brauchen Ihre Antworten nicht beweisen.

Lösung:

Die oben angegebene Grammatik liegt in folgenden Typen der Chomsky-Hierarchie:

- Typ 0, da *alle* Grammatiken vom Typ 0 sind.
- Typ 1, da in allen Regeln in P (ausser in $\mathrm{S} \to \varepsilon$) die linke Seite kürzer oder gleich lang wie die rechte Seite ist. Für $\mathrm{S} \to \varepsilon$ ist zwar die rechte Seite kürzer (da ε Länge 0 hat), aber da S Startsymbol ist und auf keiner rechten Seite irgendeiner Regel auftritt, ist G trotzdem in Typ 1.

Die Grammatik ist keine Typ 2 Grammatik, da zum Beispiel in der Regel $\mathrm{ACC} \to \mathrm{ABCC}$ die linke Seite nicht nur aus einer einzelnen Variable besteht. Da sie nicht vom Typ 2 ist, kann sie ebenfalls nicht vom Typ 3 sein.