**Theorie der Informatik**

G. Röger
Frühjahrssemester 2020

Universität Basel
Fachbereich Informatik

# Übungsblatt 3 — Lösungen

**Aufgabe 3.1** (Inferenz; 1.5+1.5 Punkte)

Der formale Beweis der Korrektheit eines Kalküls beruht im Kern darauf, dass man für jede Regel

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\psi}$$

zeigt, dass $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$.

(a) Beweisen Sie die Korrektheit von Modus tollens.

**Lösung:**

Sei $\mathcal{I}$ ein beliebiges Modell der Formeln $\neg\psi$ und $(\varphi \rightarrow \psi)$. Wegen $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$ wissen wir, dass $\mathcal{I} \models \psi$ wahr ist falls $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt. Da aber $\mathcal{I} \models \neg\psi$ gilt, wissen wir, dass $\mathcal{I} \not\models \psi$ und wir können schliessen, dass $\mathcal{I} \not\models \varphi$. Daraus folgt direkt, dass $\mathcal{I} \models \neg\varphi$. Damit haben wir gezeigt, dass jedes Modell von $\neg\psi$ und $(\varphi \rightarrow \psi)$ auch ein Modell von $\neg\varphi$ ist, also dass $\{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)\} \models \neg\varphi$.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit einer neuen Inferenzregel

$$\frac{(\varphi \lor \chi), (\psi \lor \neg\chi)}{(\varphi \lor \psi)}.$$

**Lösung:**

Sei $\mathcal{I}$ ein beliebiges Modell der Formeln $(\varphi \lor \chi)$ und $(\psi \lor \neg\chi)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1 ($\mathcal{I} \models \chi$): Aus $\mathcal{I} \models (\psi \lor \neg\chi)$ folgt, dass $\mathcal{I} \models \psi$ oder $\mathcal{I} \models \neg\chi$ gelten muss. Da aber $\mathcal{I} \models \chi$ gilt, kann $\mathcal{I} \models \neg\chi$ nicht gelten und $\mathcal{I} \models \psi$ muss gelten. Daraus folgt, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \lor \psi)$.

Fall 2 ($\mathcal{I} \not\models \chi$): Aus $\mathcal{I} \models (\varphi \lor \chi)$ folgt mit der gleichen Argumentation wie oben, dass auch $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt. Daraus folgt, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \lor \psi)$.

Wir haben damit gezeigt, dass jedes Modell der Formeln $(\varphi \lor \chi)$ und $(\psi \lor \neg\chi)$ auch ein Modell der Formel $(\varphi \lor \psi)$ ist. Damit gilt, dass $\{(\varphi \lor \chi), (\psi \lor \neg\chi)\} \models (\varphi \lor \psi)$.

**Aufgabe 3.2** (Resolutionskalkül; 2 Punkte)

Betrachten Sie die Wissensbasis

$$\text{WB} = \{(A \leftrightarrow \neg D), (\neg A \rightarrow (B \lor C)), ((A \rightarrow E) \land (B \lor C \lor F)), (E \rightarrow (F \rightarrow (B \lor C))), (C \rightarrow G), (G \rightarrow \neg C)\}.$$

Verwenden sie den Resolutionskalkül, um zu zeigen, dass WB $\models (B \land \neg C)$.

**Lösung:**

Um zu zeigen, dass $WB \models (B \land \neg C)$, zeigen wir, dass $WB' = WB \cup \{\neg(B \land \neg C)\}$ unerfüllbar ist.

Da wir Resolution verwenden wollen, müssen wir $WB'$ zunächst in Klauselform bringen:

| Formeln (und Äquivalenzen) | Klauseln |
|---|---|
| $(A \leftrightarrow \neg D)$<br>$\equiv ((A \rightarrow \neg D) \wedge (\neg D \rightarrow A))$<br>$\equiv ((\neg A \vee \neg D) \wedge (\neg\neg D \vee A))$<br>$\equiv ((\neg A \vee \neg D) \wedge (D \vee A))$ | $\{\neg A, \neg D\}$<br>$\{A, D\}$ |
| $(\neg A \rightarrow (B \vee C))$<br>$\equiv (\neg\neg A \vee (B \vee C))$<br>$\equiv (A \vee B \vee C)$ | $\{A, B, C\}$ |
| $((A \rightarrow E) \wedge (B \vee C \vee F))$<br>$\equiv ((\neg A \vee E) \wedge (B \vee C \vee F))$ | $\{\neg A, E\}$<br>$\{B, C, F\}$ |
| $(E \rightarrow (F \rightarrow (B \vee C)))$<br>$\equiv (\neg E \vee (\neg F \vee (B \vee C)))$<br>$\equiv (\neg E \vee \neg F \vee B \vee C)$ | $\{B, C, \neg E, \neg F\}$ |
| $(C \rightarrow G)$<br>$\equiv (\neg C \vee G)$ | $\{\neg C, G\}$ |
| $(G \rightarrow \neg C)$<br>$\equiv (\neg G \vee \neg C)$ | $\{\neg C, \neg G\}$ |
| $\neg(B \wedge \neg C)$<br>$\equiv (\neg B \vee C)$ | $\{\neg B, C\}$ |

Wir müssen die leere Klausel $\square$ also aus folgender Klauselmenge $\Delta$ ableiten:

$$\begin{aligned}\Delta = \{&\{\neg A, \neg D\}, \{A, D\}, \{A, B, C\}, \{\neg A, E\}, \{B, C, F\},\\ &\{B, C, \neg E, \neg F\}, \{\neg C, G\}, \{\neg C, \neg G\}, \{\neg B, C\}\}.\end{aligned}$$

Eine mögliche Ableitung ist:

$$\begin{array}{ll}
K_1 = \{\neg C, G\} & \text{aus } \Delta \\
K_2 = \{\neg C, \neg G\} & \text{aus } \Delta \\
K_3 = \{\neg C\} & \text{aus } K_1 \text{ und } K_2 \\
K_4 = \{A, B, C\} & \text{aus } \Delta \\
K_5 = \{A, B\} & \text{aus } K_3 \text{ und } K_4 \\
K_6 = \{C, \neg B\} & \text{aus } \Delta \\
K_7 = \{\neg B\} & \text{aus } K_3 \text{ und } K_6 \\
K_8 = \{A\} & \text{aus } K_5 \text{ und } K_7 \\
K_9 = \{\neg A, E\} & \text{aus } \Delta \\
K_{10} = \{E\} & \text{aus } K_8 \text{ und } K_9 \\
K_{11} = \{B, C, \neg E, \neg F\} & \text{aus } \Delta \\
K_{12} = \{B, C, \neg F\} & \text{aus } K_{10} \text{ und } K_{11} \\
K_{13} = \{C, \neg F\} & \text{aus } K_7 \text{ und } K_{12} \\
K_{14} = \{\neg F\} & \text{aus } K_3 \text{ und } K_{13} \\
K_{15} = \{B, C, F\} & \text{aus } \Delta \\
K_{16} = \{C, F\} & \text{aus } K_7 \text{ und } K_{15} \\
K_{17} = \{C\} & \text{aus } K_{14} \text{ und } K_{16} \\
K_{18} = \square & \text{aus} K_3 \text{ und } K_{17}
\end{array}$$

Mit dem Widerlegungstheorem können wir folgern, dass $WB \models (B \wedge \neg C)$.

**Aufgabe 3.3** (Prädikatenlogik – Terminologie; 2 Punkte)

Klassifizieren Sie die folgenden Ausdrücke als *Terme*, *Grundterme*, *Atome*, *Formeln* oder *Metasprache* (Aussagen, die nicht Teil der Prädikatenlogik selbst sind, sondern Aussagen über die Semantik). Wenn bei einem Ausdruck mehrere Möglichkeiten passen, geben Sie bitte alle an.
In den Ausdrücken sind a und b Konstantensymbole, $x$ und $y$ Variablensymbole, f und g Funktionssymbole und P und Q Prädikatensymbole.

(a) $\mathrm{P}(x, y)$

(b) $\mathrm{f}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$

(c) $\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathrm{a}, \mathrm{f}(\mathrm{b}))$

(d) $\mathcal{I}, \alpha \models \mathrm{P}(\mathrm{a}, \mathrm{f}(x))$

(e) $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x), \mathrm{b})$

(f) $\mathrm{Q}(x)$ ist erfüllbar.

(g) $(\exists x \mathrm{P}(x, y) \wedge \mathrm{Q}(x)) \vee \mathrm{P}(y, x)$

(h) $\forall x(\exists y \mathrm{P}(x, y) \wedge \mathrm{Q}(x)) \vee \mathrm{P}(x, y)$

(i) $\forall x \forall y(\mathrm{P}(x, y) \wedge \mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(\mathrm{f}(y), x))$

(j) $\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(x, y) \equiv \mathrm{P}(x, y) \vee \mathrm{Q}(x)$

**Lösung:**

- Terme: b, e
- Grundterme: b
- Atome: a
- Formeln: a, g, h, i
- Aussagen in Metasprache: c, d, f, j

**Aufgabe 3.4** (Prädikatenlogik; 3 Punkte)
Betrachten Sie die folgende prädikatenlogische Formel $\varphi$ über der Signatur $\langle\{x\},\{\mathrm{c}\},\{\mathrm{f}\},\{\mathrm{P}\}\rangle$.

$$\varphi = (\exists x\, (\mathrm{P}(x) \wedge \neg \mathrm{P}(\mathrm{f}(x))) \wedge \forall x\, \neg(\mathrm{f}(x) = \mathrm{c}))$$

Geben Sie ein Modell $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ von $\varphi$ an und *beweisen* Sie, dass $\mathcal{I} \models \varphi$. Warum ist es nicht notwendig, eine Variablenbelegung $\alpha$ zu spezifieren, um ein Modell von $\varphi$ anzugeben?

**Lösung:**
Die folgende Interpretation $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ ist ein Modell von $\varphi$.

$$\begin{aligned}
&U = \{u_1, u_2, u_3\} \\
&\mathrm{c}^{\mathcal{I}} = u_1 \\
&\mathrm{f}^{\mathcal{I}} = \{u_1 \mapsto u_2, u_2 \mapsto u_2, u_3 \mapsto u_2\} \\
&\mathrm{P}^{\mathcal{I}} = \{u_3\}
\end{aligned}$$

Wir betrachten die beiden Konjunktionsglieder zuerst getrennt und nehmen dabei eine beliebige Variablenbelegung $\alpha$ an.

*Beweis für $\mathcal{I}, \alpha \models \exists x\, (P(x) \wedge \neg P(f(x)))$:*
Wir betrachten die Variablenbelegung $\alpha' = \alpha[x := u_3]$. Unter dieser Variablenbelegung ist $x^{\mathcal{I},\alpha'} = \alpha'(x) = u_3 \in \mathrm{P}^{\mathcal{I}}$ und $\mathrm{f}(x)^{\mathcal{I},\alpha'} = \mathrm{f}^{\mathcal{I}}(\alpha'(x)) = \mathrm{f}^{\mathcal{I}}(u_3) = u_2 \notin \mathrm{P}^{\mathcal{I}}$.
Aus $x^{\mathcal{I},\alpha'} \in \mathrm{P}^{\mathcal{I}}$ folgt $\mathcal{I}, \alpha' \models \mathrm{P}(x)$. Analog folgt aus $\mathrm{f}(x)^{\mathcal{I},\alpha'} \notin \mathrm{P}^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, \alpha' \not\models \mathrm{P}(\mathrm{f}(x))$ und damit $\mathcal{I}, \alpha' \models \neg\mathrm{P}(\mathrm{f}(x))$. Aus $\mathcal{I}, \alpha' \models \mathrm{P}(x)$ und $\mathcal{I}, \alpha' \models \neg\mathrm{P}(\mathrm{f}(x))$ folgt dann $\mathcal{I}, \alpha' \models (\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(\mathrm{f}(x)))$.
Da es ein $u \in U$ gibt (nämlich $u_3$) für das $\mathcal{I}, \alpha[x := u] \models (\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(\mathrm{f}(x)))$ gilt, folgt dann $\mathcal{I}, \alpha \models \exists x\, (\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(\mathrm{f}(x)))$.

*Beweis für $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x\, \neg(f(x) = c)$:*
Für jedes $u \in U$ betrachten wir die Variablenbelegung $\alpha' = \alpha[x := u]$. Egal was $u$ ist, es gilt $\mathrm{f}(x)^{\mathcal{I},\alpha'} = \mathrm{f}^{\mathcal{I}}(\alpha'(x)) = \mathrm{f}^{\mathcal{I}}(u) = u_2$.
Andererseits ist $\mathrm{c}^{\mathcal{I},\alpha'} = \mathrm{c}^{\mathcal{I}} = u_1 \neq u_2$ und damit $\mathrm{f}(x)^{\mathcal{I},\alpha'} \neq \mathrm{c}^{\mathcal{I},\alpha'}$. Also gilt $\mathcal{I}, \alpha' \not\models (\mathrm{f}(x) = \mathrm{c})$ und damit $\mathcal{I}, \alpha' \models \neg(\mathrm{f}(x) = \mathrm{c})$.
Da für alle $u \in U$ gilt, dass $\mathcal{I}, \alpha[x := u] \models \neg(\mathrm{f}(x) = \mathrm{c})$, folgt $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x\, \neg(\mathrm{f}(x) = \mathrm{c})$.

Aus $\mathcal{I}, \alpha \models \exists x\, (\mathrm{P}(x) \wedge \neg\mathrm{P}(\mathrm{f}(x)))$ und $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x\, \neg(\mathrm{f}(x) = \mathrm{c})$ folgt dann direkt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$.
Da alle Variablen gebunden sind, hängt der Beweis nicht von der Variablenbelegung $\alpha$ ab, und sie wird nicht benötigt um ein Modell anzugeben.