Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2020

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 1 — Lösungen

Aufgabe 1.1 (Strukturelle Induktion; 3 Punkte)

Wir definieren für die Binärbäume aus der Vorlesung zwei Funktionen $\mathit{höhe} : \mathcal{B} \to \mathbb{N}_0$ und $\mathit{blätter} : \mathcal{B} \to \mathbb{N}_0$, die jeden Binärbaum $B \in \mathcal{B}$ auf seine Höhe $\mathit{höhe}(B)$ bzw. die Anzahl seiner Blätter $\mathit{blätter}(B)$ abbilden:

- $\mathit{höhe}(\square) = 0$
- $\mathit{höhe}((B_L, \bigcirc, B_R)) = \max(\mathit{höhe}(B_L), \mathit{höhe}(B_R)) + 1$
- $\mathit{blätter}(\square) = 1$
- $\mathit{blätter}((B_L, \bigcirc, B_R)) = \mathit{blätter}(B_L) + \mathit{blätter}(B_R)$

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden Binärbaum $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass

$$\mathit{blätter}(B) \leq 2^{\mathit{höhe}(B)}.$$

Lösung:

Wir zeigen die Aussage durch Induktion über die Struktur der Binärbäume.
Induktionsanfang: Die Eigenschaft gilt für den Basisfall $B = \square$:

$$\mathit{blätter}(\square) = 1 = 2^{1-1} = 2^{\mathit{höhe}(\square)}.$$

Induktionsvoraussetzung:
$\mathit{blätter}(B_L) \leq 2^{\mathit{höhe}(B_L)}$ und $\mathit{blätter}(B_R) \leq 2^{\mathit{höhe}(B_R)}$ für Binärbäume B_L und B_R.

Induktionsschritt von B_L und B_R zu $B = (B_L, \bigcirc, B_R)$:

$$\begin{aligned}
\mathit{blätter}((B_L, \bigcirc, B_R)) &= \mathit{blätter}(B_L) + \mathit{blätter}(B_R) \\
&\overset{(IV)}{\leq} 2^{\mathit{höhe}(B_L)} + 2^{\mathit{höhe}(B_R)} \\
&\leq 2^{\max(\mathit{höhe}(B_L), \mathit{höhe}(B_R))} + 2^{\max(\mathit{höhe}(B_L), \mathit{höhe}(B_R))} \\
&= 2\left(2^{\max(\mathit{höhe}(B_L), \mathit{höhe}(B_R))}\right) \\
&= 2^{\max(\mathit{höhe}(B_L), \mathit{höhe}(B_R))+1} \\
&= 2^{\mathit{höhe}((B_L, \bigcirc, B_R))}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.2 (Formalisierung in Aussagenlogik; 0.5+0.5+0.5+0.5 Punkte)

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen als aussagenlogische Formeln. Definieren Sie hierzu geeignete atomare Aussagen. Achten Sie darauf alle Formeln vollständig zu klammern.

(a) Wenn es nicht regnet, dann ist es warm.

Lösung:

$(\neg \mathit{Regen} \to \mathit{warm})$

(b) Wenn Bob schwimmen geht, dann isst er immer ein Eis und es regnet nicht.

Lösung:

$(\mathit{BobSchwimmt} \to (\mathit{BobIsstEis} \land \neg \mathit{Regen}))$

(c) Bob geht genau dann schwimmen, wenn er Eis isst und es warm ist oder es nicht regnet.

Lösung:

Die natürliche Sprache ist hier zweideutig. Die Aussage kann auf zwei Arten verstanden werden:
$(BobSchwimmt \leftrightarrow (BobIsstEis \wedge (warm \vee \neg Regen)))$
$(BobSchwimmt \leftrightarrow ((BobIsstEis \wedge warm) \vee \neg Regen))$

(d) Entweder die Sonne scheint oder es regnet (aber nicht beides zusammen).

Lösung:

$((Sonne \vee Regen) \wedge \neg(Sonne \wedge Regen))$

Aufgabe 1.3 (Semantik der Aussagenlogik; 2+2 Punkte)
Betrachten Sie die Formel $\varphi = ((A \wedge \neg B) \to (\neg A \vee \neg C))$ über $\{A, B, C\}$.

(a) Geben Sie ein Modell $\mathcal{I}$ für φ an und beweisen Sie, dass $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt.

Lösung:

$$\mathcal{I} = \{A \mapsto 0, B \mapsto 0, C \mapsto 0\}$$

Aus $\mathcal{I}(A) = 0$ folgt, dass $\mathcal{I} \not\models A$ gilt und daher auch $\mathcal{I} \not\models (A \wedge \neg B)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{I} \models \neg(A \wedge \neg B)$. Mit der Semantik der Disjunktion folgt, dass $\mathcal{I} \models (\neg(A \wedge \neg B) \vee \psi)$ für beliebige Formeln ψ gilt, insbesondere für $(\neg(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee \neg C))$, die Formel, die durch φ abgekürzt wird.

(b) Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}$ an unter der φ falsch ist, und beweisen Sie dass $\mathcal{I} \not\models \varphi$ gilt.

Lösung:

$$\mathcal{I} = \{A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1\}$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{I} \models A$ und $\mathcal{I} \models \neg B$ gilt (da $\mathcal{I} \not\models B$). Daraus folgt, dass $\mathcal{I} \models (A \wedge \neg B)$ gilt und daher auch $\mathcal{I} \not\models \neg(A \wedge \neg B)$ (*).

Wegen $\mathcal{I}(C) = 1$ gilt $\mathcal{I} \models C$, woraus folgt, dass $\mathcal{I} \not\models \neg C$ gilt. Analog impliziert $\mathcal{I}(A) = 1$, dass $\mathcal{I} \not\models \neg A$ gilt. Zusammen folgt $\mathcal{I} \not\models (\neg A \vee \neg C)$ (**).

Aus (*) und (**) folgern wir $\mathcal{I} \not\models (\neg(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee \neg C)$ und damit gilt $\mathcal{I} \not\models \varphi$.

Aufgabe 1.4 (Semantik der Aussagenlogik; 1 Punkte)
Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln über die gleiche Menge von atomaren Aussagen A und sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation für A. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)$ gdw. $\mathcal{I} \not\models \varphi$ oder $\mathcal{I} \models \psi$.
Lösung:
Ausdruck $(\varphi \to \psi)$ ist eine Abkürzung für $(\neg\varphi \vee \psi)$, was unter $\mathcal{I}$ wahr ist gdw. $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ oder $\mathcal{I} \models \psi$. Die Behauptung folgt mit $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ gdw. $\mathcal{I} \not\models \varphi$.