Theorie der Informatik

G. Röger
F. Pommerening
Frühjahrssemester 2020

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 11

Abgabe: Mittwoch, 13. Mai 2020

Aufgabe 11.1 (Unentscheidbarkeit; 1+3+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es für jedes Alphabet Σ eine kontextfreie Grammatik $G_{\text{Palindrom}}(\Sigma)$ gibt, die genau die nichtleeren Palindrome über Σ erzeugt.

(b) Betrachten Sie eine PCP-Instanz $\mathcal{I} = \langle (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \rangle$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$. Sei $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#\}$, wobei # ein Zeichen ist, das in Σ nicht vorkommt. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G_\mathcal{I}$ über Σ' an, welche die folgende Sprache erzeugt (mit $^{-1}$ bezeichnen wir hier die Umkehrung eines Wortes):

$$\mathcal{L}(G_\mathcal{I}) = \{x_{i_1} \dots x_{i_n} \# y_{i_n}^{-1} \dots y_{i_1}^{-1} \mid n \geq 1 \text{ und } i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}\}$$

Zeigen Sie dann, dass $\mathcal{I}$ genau dann eine Lösung hat, wenn $\mathcal{L}(G_\mathcal{I})$ ein Palindrom enthält.

(c) Verwenden Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (a) und (b) um zu beweisen, dass das Schnittproblem für *kontextfreie* Grammatiken unentscheidbar ist.

$\textsc{Schnitt}_{\text{KF}}$: Gegeben zwei kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2, gilt $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$?

Hinweis: Natürlich können Sie die Aussagen aus den Teilen (a) und (b) auch verwenden, wenn Sie die Aufgaben nicht gelöst haben.

Aufgabe 11.2 (Nicht-deterministische Algorithmen; 2+2 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Probleme einen nichtdeterministischen, polynomiellen Algorithmus an. Damit zeigen Sie, dass die Probleme in der Komplexitätsklasse NP liegen, die wir nächste Woche kennenlernen werden.

(a) HittingSet:

- *Gegeben:* endliche Menge M, Menge $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq M$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, eine natürlich Zahl $k \in \mathbb{N}_0$
- *Gefragt:* Gibt es eine Menge H mit höchstens k Elementen, die aus jeder Menge aus $\mathcal{S}$ mindestens ein Element enthält?
  Formal: Gibt es eine Menge H mit $|H| \leq k$ und $H \cap S_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$?

(b) SetPacking:

- *Gegeben:* endliche Menge M, Menge $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq M$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, eine natürlich Zahl $k \in \mathbb{N}_0$
- *Gefragt:* Gibt es $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ mit $|\mathcal{S}'| \geq k$, so dass alle Mengen in $\mathcal{S}'$ paarweise disjunkt sind, d.h. für alle $S_i, S_j \in \mathcal{S}'$ mit $S_i \neq S_j$ gilt $S_i \cap S_j = \emptyset$?