Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2020

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 29. April 2020

Aufgabe 9.1 (Turing-Maschinen; 2 Punkte)

Wir haben das Band einer Turing-Maschine so definiert, dass es in beide Richtungen unendlich ist. Eine alternative Definition verwendet ein Band, dass nur in eine Richtung unendlich ist. Formal gesehen, kann man das erreichen, indem die Definition eines *Berechnungsschritts* ändert und alle anderen Definitionen unverändert lässt: In der Definition auf Folie C7.16, ändern wir den dritten Fall von

$$\langle \varepsilon, q, b_1 \dots b_n \rangle \vdash_M \langle \varepsilon, q', \square c b_2 \dots b_n \rangle \qquad \text{if } \langle q', c, L \rangle \in \delta(q, b_1), n \geq 1$$

zu

$$\langle \varepsilon, q, b_1 \dots b_n \rangle \vdash_M \langle \varepsilon, q', c b_2 \dots b_n \rangle \qquad \text{if } \langle q', c, L \rangle \in \delta(q, b_1), n \geq 1.$$

Turing-Maschinen mit solchen Berechnungsschritten verhalten sich genau so wie unsere Turing-Maschinen, bis auf den Fall, in dem sie versuchen den Kopf von der ersten Position aus nach links zu verschieben. In diesem Fall bleibt der Kopf einfach auf der ersten Position.

Die Verwendung von beidseitig unendlichem Band macht unsere Turing-Maschinen nicht ausdrucksstärker als Maschinen mit einseitig unendlichem Band. Erklären Sie wie eine gegebene Turing-Maschine $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, E \rangle$ mit beidseitig unendlichem Band zu einer Maschine M' mit einseitig unendlichem Band verändert werden kann, damit M' die gleiche Sprache wie M akzeptiert.

Hinweis: Die Beweisidee ist hier ausreichend, aber Sie sollten erklären, welche Art von zusätzlichen Symbolen und Zuständen in M' benötigt werden und was die grundsätzliche Idee der Transformation ist.

Aufgabe 9.2 (Multiplikation ist Turing-berechenbar; 2 Punkte)

Beschreiben Sie die Beweisidee dafür, dass die Multiplikation von Binärzahlen Turing-berechenbar ist, d.h., beschreiben Sie eine Turing-Maschine, die mul^{code} für die Funktion $mul : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow_{\text{p}} \mathbb{N}_0$ mit $mul(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2$ berechnet.

Hinweis: Sie können verwenden, dass die Addition Turing-berechenbar ist, und eine high-level Beschreibung der Turing-Maschine ist ausreichend.

Aufgabe 9.3 (Komposition berechenbarer Funktionen ist berechenbar; 2 Punkte)

Seien $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ und $g : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ Turing-berechenbare partielle Funktionen für ein Alphabet Σ. Zeigen Sie, dass dann auch die *Komposition* $(f \circ g) : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ Turing-berechenbar ist.

Die Komposition zweier Funktionen ist allgemein definiert als $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Der Funktionswert ist insbesondere auch undefiniert, wenn $g(x)$ undefiniert ist.

Aufgabe 9.4 (Aufzählungsfunktionen; 2 Punkte)

Sei $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Geben Sie totale und berechenbare Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \Sigma^*$ an, die die folgenden Sprachen rekursiv aufzählen, und geben Sie jeweils die Funktionswerte $f(0)$, $f(1)$, …, $f(5)$ an. Sie dürfen hierbei alle in der Vorlesung besprochenen berechenbaren Funktionen verwenden.

(a) $L_1 = \{\mathtt{b}^n \mathtt{a}^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0, n \text{ ist gerade}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \mathtt{a} \text{ kommt in } w \text{ genau einmal vor}\}$

Aufgabe 9.5 (Entscheidbarkeit; 2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen Sie Ihre Antworten mit jeweils ein bis zwei Sätzen.

(a) Wenn L entscheidbar ist, dass ist L auch endlich.

(b) Wenn L regulär ist, dann ist L auch entscheidbar.

(c) Wenn L_1 und L_2 entscheidbar sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ entscheidbar.

(d) Wenn L kontext-sensitiv ist, dann ist L auch semi-entscheidbar.