Theorie der Informatik

G. Röger | Universität Basel
Frühjahrssemester 2020 | Fachbereich Informatik

Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 18. März 2020

Aufgabe 3.1 (Inferenz; 1.5+1.5 Punkte)
Der formale Beweis der Korrektheit eines Kalküls beruht im Kern darauf, dass man für jede Regel

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi}$$

zeigt, dass $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$.

(a) Beweisen Sie die Korrektheit von Modus tollens.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit einer neuen Inferenzregel

$$\frac{(\varphi \vee \chi), (\psi \vee \neg\chi)}{(\varphi \vee \psi)}.$$

Aufgabe 3.2 (Resolutionskalkül; 2 Punkte)
Betrachten Sie die Wissensbasis

$\mathrm{WB} = \{(A \leftrightarrow \neg D), (\neg A \rightarrow (B \vee C)), ((A \rightarrow E) \wedge (B \vee C \vee F)), (E \rightarrow (F \rightarrow (B \vee C))), (C \rightarrow G), (G \rightarrow \neg C)\}.$

Verwenden sie den Resolutionskalkül, um zu zeigen, dass $\mathrm{WB} \models (B \wedge \neg C)$.
Anmerkung: Ein Resolutionsbeweis besteht aus drei Schritten (siehe Beispiel auf den Vorlesungsfolien). Verwenden Sie insbesondere für die Ableitung im dritten Schritt die Notation aus den Folien, also eine Zeile pro hergeleiteter Klausel zusammen mit einer Begründung der Ableitung.

Aufgabe 3.3 (Prädikatenlogik – Terminologie; 2 Punkte)
Klassifizieren Sie die folgenden Ausdrücke als *Terme*, *Grundterme*, *Atome*, *Formeln* oder *Metasprache* (Aussagen, die nicht Teil der Prädikatenlogik selbst sind, sondern Aussagen über die Semantik). Wenn bei einem Ausdruck mehrere Möglichkeiten passen, geben Sie bitte alle an.
In den Ausdrücken sind a und b Konstantensymbole, x und y Variablensymbole, f und g Funktionssymbole und P und Q Prädikatensymbole.

(a) $\mathrm{P}(x, y)$

(b) $\mathrm{f}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$

(c) $\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathrm{a}, \mathrm{f}(\mathrm{b}))$

(d) $\mathcal{I}, \alpha \models \mathrm{P}(\mathrm{a}, \mathrm{f}(x))$

(e) $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x), \mathrm{b})$

(f) $\mathrm{Q}(x)$ ist erfüllbar.

(g) $(\exists x \mathrm{P}(x, y) \wedge \mathrm{Q}(x)) \vee \mathrm{P}(y, x)$

(h) $\forall x (\exists y \mathrm{P}(x, y) \wedge \mathrm{Q}(x)) \vee \mathrm{P}(x, y)$

(i) $\forall x \forall y (\mathrm{P}(x, y) \wedge \mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(\mathrm{f}(y), x))$

(j) $\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(x, y) \equiv \mathrm{P}(x, y) \vee \mathrm{Q}(x)$

Aufgabe 3.4 (Prädikatenlogik; 3 Punkte)
Betrachten Sie die folgende prädikatenlogische Formel φ über der Signatur $\langle \{x\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{f}\}, \{\mathrm{P}\} \rangle$.

$$\varphi = (\exists x\, (\mathrm{P}(x) \wedge \neg \mathrm{P}(\mathrm{f}(x))) \wedge \forall x\, \neg(\mathrm{f}(x) = \mathrm{c}))$$

Geben Sie ein Modell $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ von φ an und *beweisen* Sie, dass $\mathcal{I} \models \varphi$.
Warum ist es nicht notwendig, eine Variablenbelegung α zu spezifieren, um ein Modell von φ anzugeben?