Algorithmen und Datenstrukturen

C7. Graphen: Ausblick

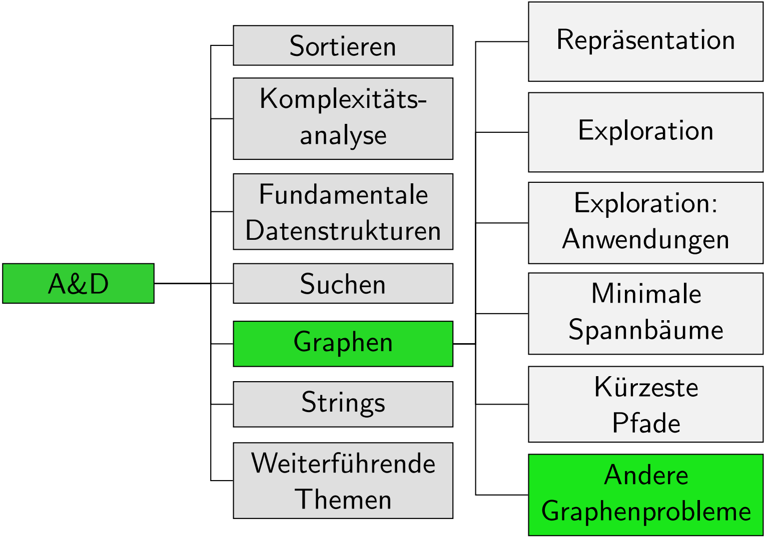
Gabriele Röger

Universität Basel

20. Mai 2020

Andere Graphenprobleme

Inhalt dieser Veranstaltung



Crashkurs Komplexitätstheorie

- Entscheidungsprobleme: Ja/Nein-Antwort gesucht
  Gegeben gewichteter Graph, Knoten s, t und Zahl K.
  Gibt es einen Pfad von s nach t mit Kosten höchstens K?
- Suchprobleme: tatsächliche Lösung gesucht
  Gegeben gewichteter Graph und Knoten s, t.
  Finde einen kürzesten Pfad von s nach t.

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

- P: alle Probleme, die man mit einem polynomiellen Algorithmus (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) lösen kann.

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

- P: alle Probleme, die man mit einem polynomiellen Algorithmus (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) lösen kann.
- NP: alle Probleme, bei denen man einen Beweis für eine Ja-Antwort des Entscheidungsproblems in polynomieller Zeit verifizieren kann.
  Beweis: z.B. konkreter Pfad mit Kosten $\leq$ K

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

- P: alle Probleme, die man mit einem polynomiellen Algorithmus (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) lösen kann.
- NP: alle Probleme, bei denen man einen Beweis für eine Ja-Antwort des Entscheidungsproblems in polynomieller Zeit verifizieren kann.
  Beweis: z.B. konkreter Pfad mit Kosten $\leq$ K
- P $\neq$ NP? Wir wissen es nicht.

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

- P: alle Probleme, die man mit einem polynomiellen Algorithmus (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) lösen kann.
- NP: alle Probleme, bei denen man einen Beweis für eine Ja-Antwort des Entscheidungsproblems in polynomieller Zeit verifizieren kann.
  Beweis: z.B. konkreter Pfad mit Kosten $\leq$ K
- P $\neq$ NP? Wir wissen es nicht.
- NP-schwere Probleme: Probleme, die mindestens so schwierig sind, wie die schwierigsten Probleme in NP.
  $\rightarrow$ keine polynomiellen Verfahren bekannt.

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

- P: alle Probleme, die man mit einem polynomiellen Algorithmus (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) lösen kann.
- NP: alle Probleme, bei denen man einen Beweis für eine Ja-Antwort des Entscheidungsproblems in polynomieller Zeit verifizieren kann.
  Beweis: z.B. konkreter Pfad mit Kosten $\leq$ K
- P $\neq$ NP? Wir wissen es nicht.
- NP-schwere Probleme: Probleme, die mindestens so schwierig sind, wie die schwierigsten Probleme in NP.
  $\rightarrow$ keine polynomiellen Verfahren bekannt.
- NP-vollständige Entscheidungsprobleme: NP-schwer & in NP

Crashkurs Komplexitätstheorie

Wir unterscheiden verschiedene Klassen von Problemen:

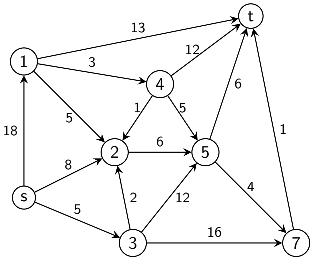
- P: alle Probleme, die man mit einem polynomiellen Algorithmus (in $O(p)$ für irgendein Polynom p) lösen kann.
- NP: alle Probleme, bei denen man einen Beweis für eine Ja-Antwort des Entscheidungsproblems in polynomieller Zeit verifizieren kann.
  Beweis: z.B. konkreter Pfad mit Kosten $\leq$ K
- P $\neq$ NP? Wir wissen es nicht.
- NP-schwere Probleme: Probleme, die mindestens so schwierig sind, wie die schwierigsten Probleme in NP.
  $\rightarrow$ keine polynomiellen Verfahren bekannt.
- NP-vollständige Entscheidungsprobleme: NP-schwer & in NP
- NP-äquivalente Suchprobleme: zugehöriges Entscheidungsproblem NP-vollständig

Flüsse in Graphen I

Definition (Flussnetzwerk)

Ein Flussnetzwerk $N = (G, s, t, k)$ ist gegeben durch

- einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$,
- einer Quelle (source) $s \in V$,
- einer Senke (target) $t \in V$, und
- einer Kapazitätsfunktion $k : E \to \mathbb{R}_+^\infty$.



Flüsse in Graphen II

Definition (Fluss)

Ein s-t-Fluss f weisst jeder Kante einen Wert aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zu, wobei

- der Flusswert die Kapazität der Kante nicht übersteigt:

$$f(e) \leq k(e) \text{ für alle } e \in E$$

Flüsse in Graphen II

Definition (Fluss)

Ein s-t-Fluss f weisst jeder Kante einen Wert aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zu, wobei

- der Flusswert die Kapazität der Kante nicht übersteigt:

$$f(e) \leq k(e) \text{ für alle } e \in E$$

- bei allen Knoten ausser der Quelle und der Senke genauso viel hinein wie hinaus fliesst:

$$\sum_{\substack{(u,w)\in E \\ w=v}} f((u,w)) = \sum_{\substack{(u,w)\in E \\ u=v}} f((u,w)) \text{ für alle } v \in V \setminus \{s,t\}$$

Flüsse in Graphen II

Definition (Fluss)

Ein s-t-Fluss f weisst jeder Kante einen Wert aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zu, wobei

- der Flusswert die Kapazität der Kante nicht übersteigt:

$$f(e) \leq k(e) \text{ für alle } e \in E$$

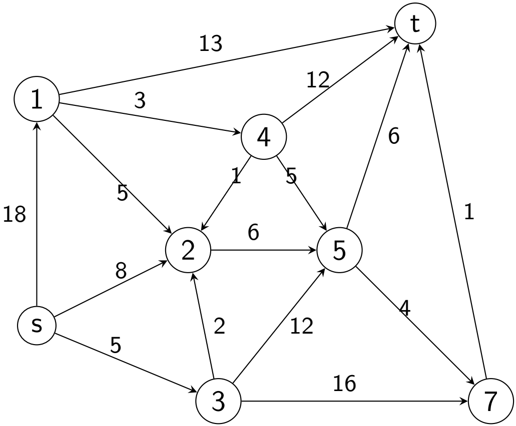
- bei allen Knoten ausser der Quelle und der Senke genauso viel hinein wie hinaus fliesst:

$$\sum_{\substack{(u,w)\in E \\ w=v}} f((u,w)) = \sum_{\substack{(u,w)\in E \\ u=v}} f((u,w)) \text{ für alle } v \in V \setminus \{s,t\}$$

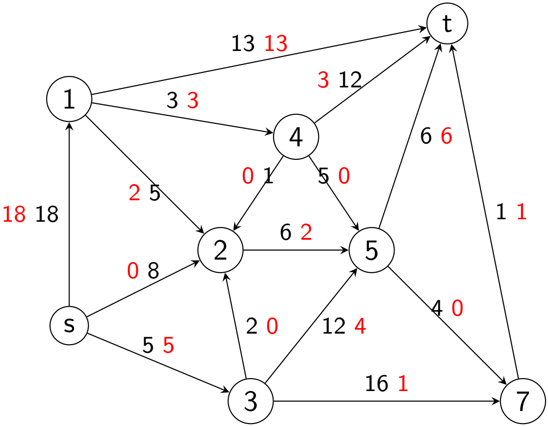
Der Wert des Flusses ist der Überschuss in der Senke:

$$|f| = \sum_{\substack{(u,w)\in E \\ w=t}} f((u,w)) - \sum_{\substack{(u,w)\in E \\ u=t}} f((u,w))$$

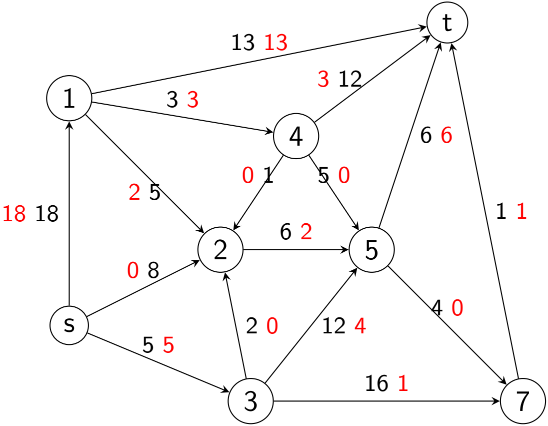
Beispiel



Beispiel

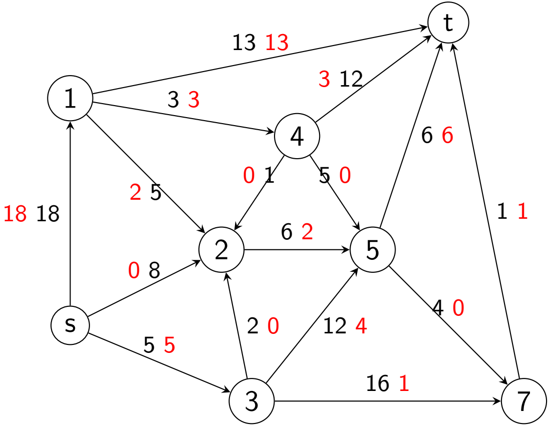


Beispiel



Wie schwer ist es, einen maximalen Fluss zu finden?

Beispiel



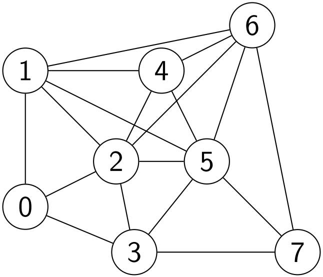
Wie schwer ist es, einen maximalen Fluss zu finden?

z.B. mit Edmonds-Karp-Algorithmus in $O(|E|^2|V|)$

Cliquen

Definition (Clique)

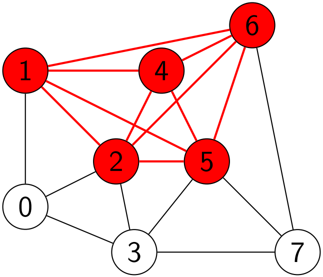
Eine Clique in einem ungerichteten Graphen (V, E) ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ der Knoten, bei der jedes Knotenpaar durch eine Kante verbunden ist: für $u, v \in C$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \in E$.



Cliquen

Definition (Clique)

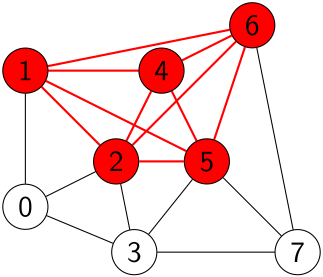
Eine Clique in einem ungerichteten Graphen (V, E) ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ der Knoten, bei der jedes Knotenpaar durch eine Kante verbunden ist: für $u, v \in C$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \in E$.



Cliquen

Definition (Clique)

Eine Clique in einem ungerichteten Graphen (V, E) ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ der Knoten, bei der jedes Knotenpaar durch eine Kante verbunden ist: für $u, v \in C$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \in E$.

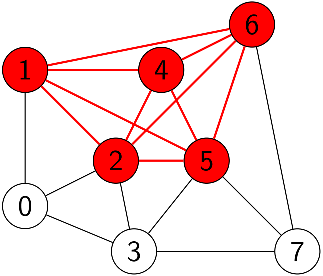


Wie schwer ist es, eine grösste Clique in einem Graphen zu finden?

Cliquen

Definition (Clique)

Eine Clique in einem ungerichteten Graphen (V, E) ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ der Knoten, bei der jedes Knotenpaar durch eine Kante verbunden ist: für $u, v \in C$ mit $u \neq v$ gilt $\{u, v\} \in E$.



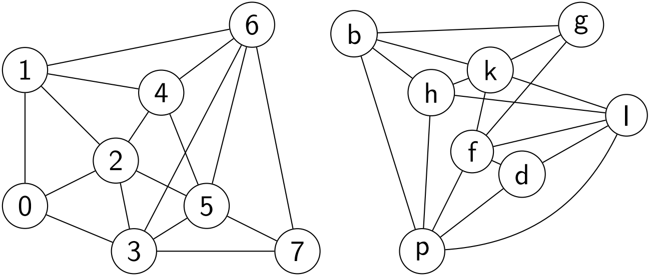
Wie schwer ist es, eine grösste Clique in einem Graphen zu finden?

NP-äquivalent

Graphenisomorphie

Definition (Graphenisomorphie)

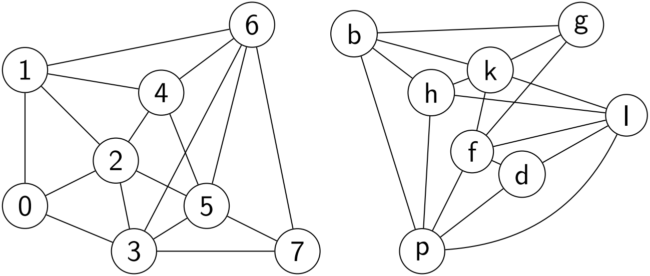
Zwei Graphen sind isomorph, wenn sie bis auf die Namen der Knoten gleich sind.



Graphenisomorphie

Definition (Graphenisomorphie)

Zwei Graphen sind isomorph, wenn sie bis auf die Namen der Knoten gleich sind.

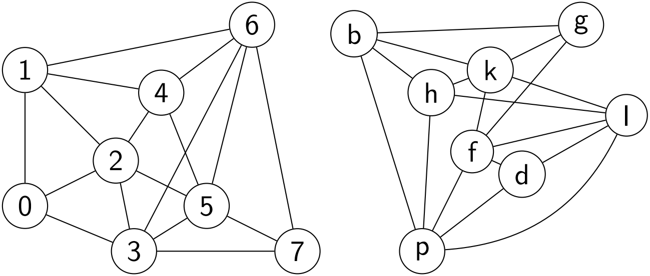


Wie schwer ist es zu entscheiden, ob zwei Graphen isomorph sind?

Graphenisomorphie

Definition (Graphenisomorphie)

Zwei Graphen sind isomorph, wenn sie bis auf die Namen der Knoten gleich sind.



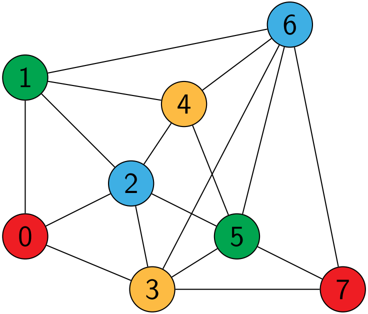
Wie schwer ist es zu entscheiden, ob zwei Graphen isomorph sind?

In NP, aber unbekannt ob in P und/oder NP-vollständig

Färbbarkeit

Definition (k-Färbbarkeit)

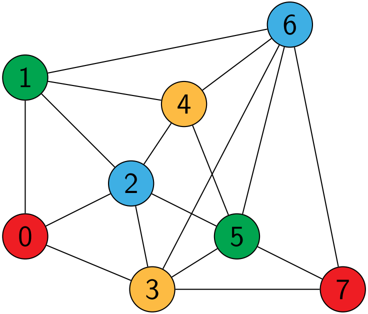
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist k-färbbar ($k \in \mathbb{N}$), falls es eine Färbung $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ gibt, so dass für alle $\{v, w\} \in E$ gilt: $f(v) \neq f(w)$.



Färbbarkeit

Definition (k-Färbbarkeit)

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist k-färbbar ($k \in \mathbb{N}$), falls es eine Färbung $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ gibt, so dass für alle $\{v, w\} \in E$ gilt: $f(v) \neq f(w)$.

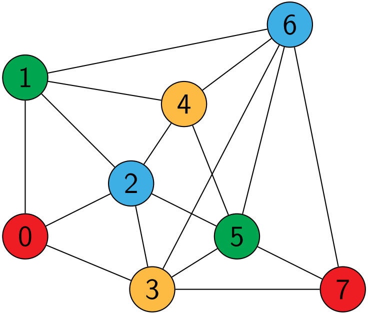


Wie schwer ist es zu entscheiden, ob ein gegebener Graph k-färbbar ist?

Färbbarkeit

Definition (k-Färbbarkeit)

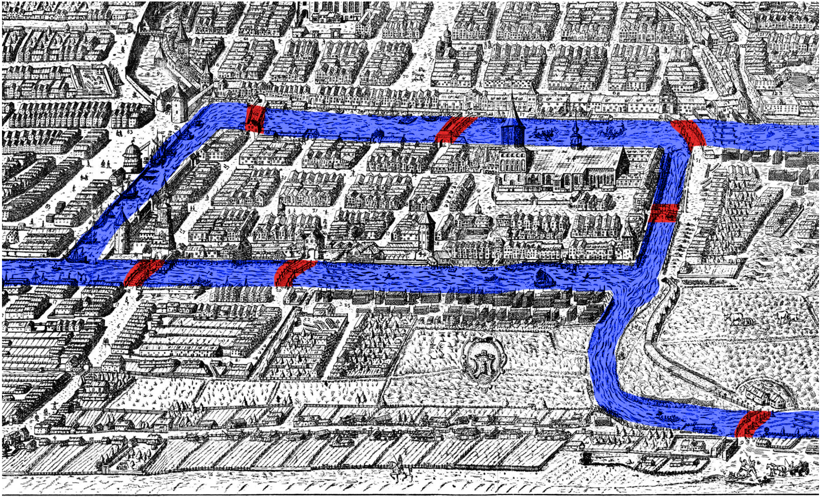
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist k-färbbar ($k \in \mathbb{N}$), falls es eine Färbung $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ gibt, so dass für alle $\{v, w\} \in E$ gilt: $f(v) \neq f(w)$.



Wie schwer ist es zu entscheiden, ob ein gegebener Graph k-färbbar ist?

NP-vollständig

Königsberger Brückenproblem

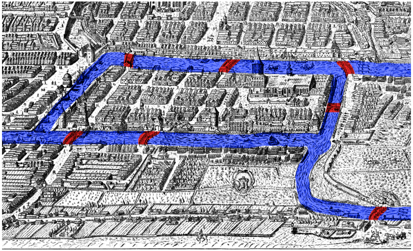


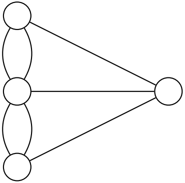
Gibt es einen Rundweg, der jede Brücke exakt einmal verwendet?

Eulerkreis

Definition (Eulerkreis)

Ein Eulerkreis in einem Graphen ist ein Zyklus,
der jede Kante genau einmal enthält.

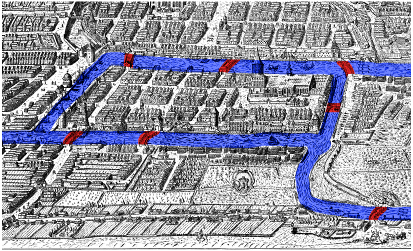


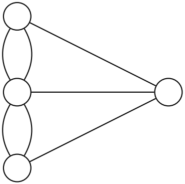


Eulerkreis

Definition (Eulerkreis)

Ein Eulerkreis in einem Graphen ist ein Zyklus, der jede Kante genau einmal enthält.



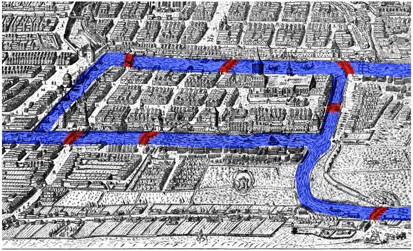


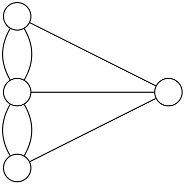
Wie schwer ist es zu entscheiden, ob ein Graph einen Eulerkreis hat?

Eulerkreis

Definition (Eulerkreis)

Ein Eulerkreis in einem Graphen ist ein Zyklus, der jede Kante genau einmal enthält.





Wie schwer ist es zu entscheiden, ob ein Graph einen Eulerkreis hat?

Hat Eulerkreis gdw. jeder Knoten geraden Grad hat und Graph verbunden ist.

Inhalt dieser Veranstaltung