

Algorithmen und Datenstrukturen

A7. Sortieren III

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

11. März 2020

Algorithmen und Datenstrukturen

11. März 2020 — A7. Sortieren III

A7.1 Untere Schranke

A7.2 Quicksort

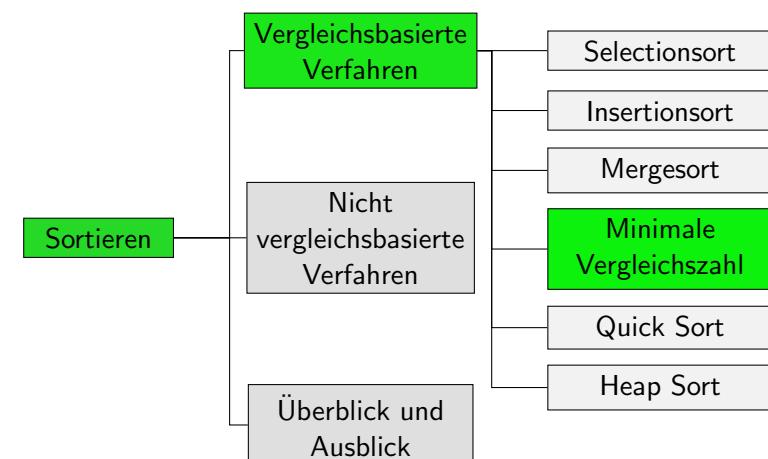
A7.3 Heapsort

A7.4 Nicht vergleichsbasierte Verfahren

A7.5 Zusammenfassung

A7.1 Untere Schranke

Sortierverfahren



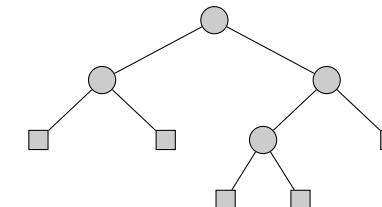
Untere Schranke I

- ▶ Mergesort hatte bisher mit $O(n \log_2 n)$ die beste (Worstcase-)Laufzeit.
- ▶ Geht es noch besser?
- ▶ **Wir zeigen:** Nicht mit vergleichsbasierten Verfahren!

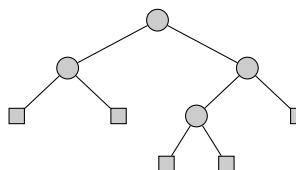
Untere Schranke II

Betrachte beliebigen vergleichsbasierten Sortieralgorithmus A.

- ▶ Verhalten hängt nur vom Ergebnis der Schlüsselvergleiche ab.
- ▶ Bei jedem Schlüsselvergleich gibt es zwei Möglichkeiten, wie der Algorithmus weiter macht.
- ▶ Wir können das graphisch als Baum darstellen.



Untere Schranke III



- ▶ **Binärbaum:** jeder Knoten hat höchstens zwei Nachfolger
- ▶ Knoten ohne Nachfolger heißen **Blätter** (Bild: eckige Knoten).
- ▶ Der Knoten ganz oben ist die **Wurzel**.
- ▶ Die **Tiefe** eines Blattes entspricht der Anzahl von Kanten von der Wurzel zu dem Blatt.

Die maximale Tiefe eines Blattes in einem Binärbaum mit k Blättern ist mindestens $\log_2 k$.

Untere Schranke IV

Was muss der Algorithmus können?

- ▶ **Annahme:** alle Elemente unterschiedlich
- ▶ Muss **alle Eingaben** der Grösse n **korrekt** sortieren.
- ▶ Wir können alle Algorithmen so anpassen, dass sie verfolgen, von welcher Position zu welcher Position die Elemente bewegt werden müssen.
- ▶ Das Ergebnis ist dann nicht das sortierte Array, sondern die entsprechende **Permutation**.
Beispiel: $\text{pos0} \mapsto \text{pos2}$, $\text{pos1} \mapsto \text{pos1}$, $\text{pos2} \mapsto \text{pos0}$
- ▶ Da alle möglichen Eingaben der Grösse n korrekt gelöst werden müssen, muss der Algorithmus **alle $n!$ möglichen Permutationen** erzeugen können.

Untere Schranke V

- ▶ Jedes Blatt in der Baumdarstellung entspricht einer Permutation.
- ▶ Bei Eingabegröße n muss der Baum also mindestens $n!$ Blätter haben.
- ▶ Die maximale Tiefe des entsprechenden Baumes ist demnach $\geq \log_2(n!)$.
- ▶ Es gibt also eine Eingabe der Grösse n mit $\geq \log_2(n!) \text{ Schlüsselvergleichen.}$

A7.2 Quicksort

Untere Schranke VI

Abschätzung von $\log_2(n!)$

▶ Es gilt $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$
 $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \geq 2^2$

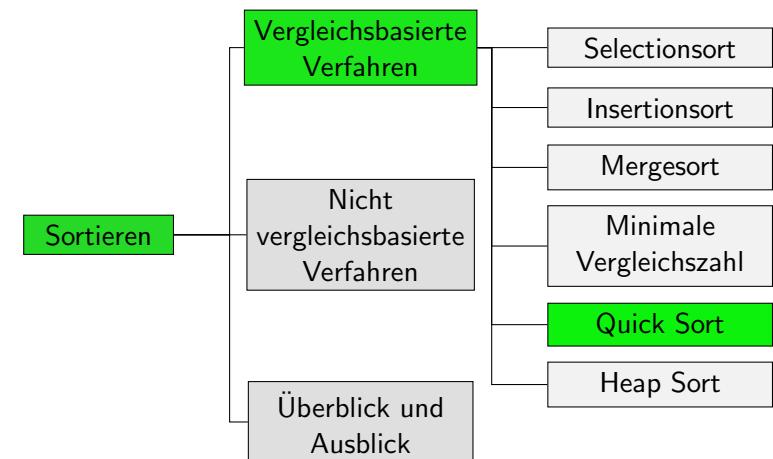
▶ $\log_2(n!) \geq \log_2((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) = \frac{n}{2} \log_2(\frac{n}{2})$
 $= \frac{n}{2}(\log_2 n + \log_2 \frac{1}{2}) = \frac{n}{2}(\log_2 n - \log_2 2)$
 $= \frac{n}{2}(\log_2 n - 1)$

Theorem

Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ viele Schlüsselvergleiche. Damit liegt auch die Laufzeit in $\Omega(n \log n)$.

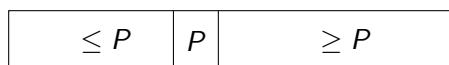
Mergesort ist asymptotisch optimal.

Sortierverfahren



Quicksort: Idee

- Wie Merge-Sort ein Divide-and-Conquer-Verfahren
- Die Sequenz wird nicht wie bei Mergesort nach Positionen aufgeteilt, sondern nach Werten.
- Hierfür wird ein Element P gewählt (das sogenannte **Pivotelement**).
- Dann wird so umsortiert, dass P an die endgültige Position kommt, vor P nur Elemente $\leq P$ stehen, und hinten nur Elemente $\geq P$.



- Macht man das rekursiv für den vorderen und den hinteren Teil, ist die Sequenz am Ende sortiert.

Quicksort: Algorithmus

```

1 def sort(array):
2     sort_aux(array, 0, len(array)-1)
3
4 def sort_aux(array, lo, hi):
5     if hi <= lo:
6         return
7     choose_pivot_and_swap_it_to_lo(array, lo, hi)
8     pivot_pos = partition(array, lo, hi)
9     sort_aux(array, lo, pivot_pos - 1)
10    sort_aux(array, pivot_pos + 1, hi)

```

Wie wählt man das Pivot-Element?

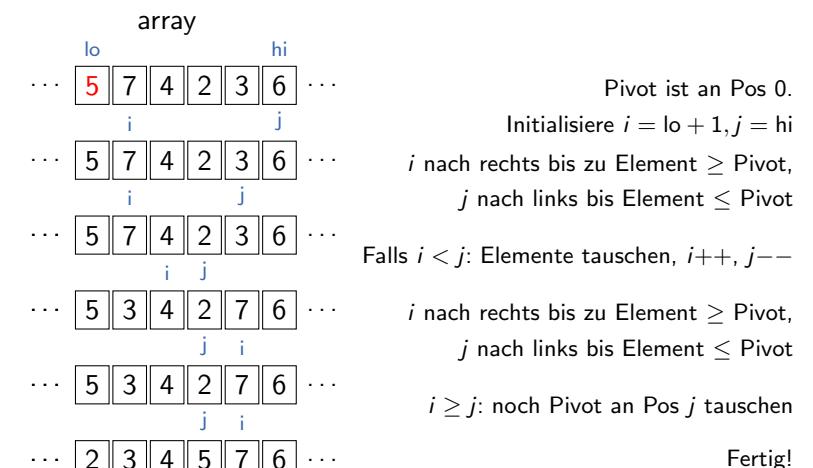
Für die Korrektheit des Verfahrens ist das egal. ([Warum?](#))

Wir können zum Bsp. folgende Strategien wählen:

- **Naiv:** Nimm immer erstes Element
- **Median of Three:** Verwende Median aus erstem, mittlerem und letztem Element
- **Randomisiert:** Wähle zufällig ein Element aus

Gute Pivot-Elemente teilen Sequenz in etwa gleich grosse Bereiche.

Wie macht man die Umsortierung?



Quicksort: Partitionierung

```

1 def partition(array, lo, hi):
2     pivot = array[lo]
3     i = lo + 1
4     j = hi
5     while (True):
6         while i < hi and array[i] < pivot:
7             i += 1
8         while array[j] > pivot:
9             j -= 1
10        if i >= j:
11            break
12
13        array[i], array[j] = array[j], array[i]
14        i, j = i + 1, j - 1
15    array[lo], array[j] = array[j], array[lo]
16    return j

```

Quicksort: Laufzeit I

Best case: Pivot-Element teilt in gleich grosse Bereiche

- ▶ $O(\log_2 n)$ rekursive Aufrufe
- ▶ jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung
- ▶ auf einer Rekursionsebene insgesamt $O(n)$ Vergleiche in Partitionierung
- $O(n \log n)$

Worst case: Pivot-Element immer kleinstes oder grösstes Element

- ▶ insgesamt $n-1$ (nichttriviale) rekursive Aufrufe für Länge $n, n-1, \dots, 2$.
- ▶ jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung
- $\Theta(n^2)$

Quicksort: Laufzeit II

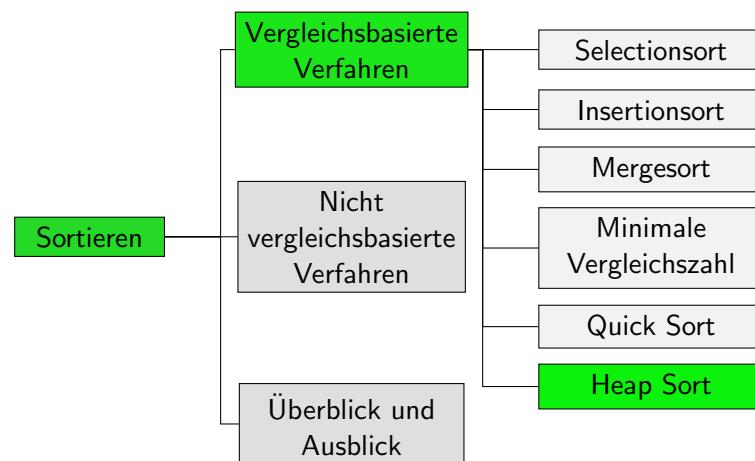
Average case:

- ▶ Annahme: n verschiedene Elemente, jede der $n!$ Permutationen gleich wahrscheinlich, Pivotelement zufällig gewählt
- ▶ $O(\log n)$ rekursive Aufrufe
- ▶ insgesamt $O(n \log n)$
- ▶ etwa 39% langsamer als best case

Bei randomisierter Pivotwahl tritt worst-case quasi nicht auf. Quicksort wird daher oft als $O(n \log n)$ -Verfahren betrachtet.

A7.3 Heapsort

Sortierverfahren

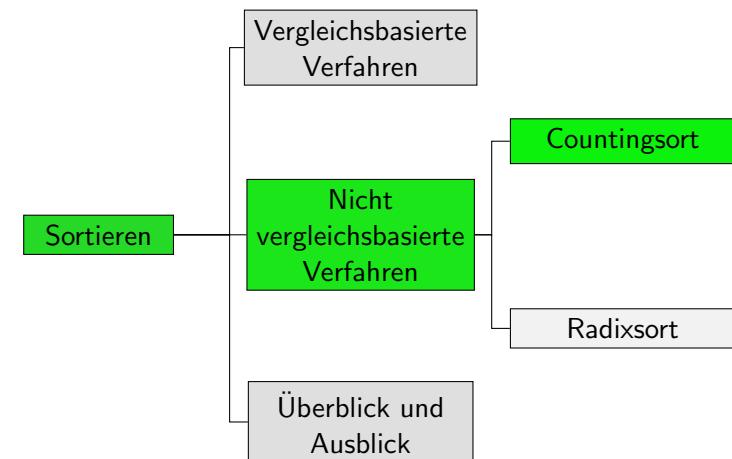


Heapsort

- ▶ **Heap:** Datenstruktur, die das Finden und Entnehmen des **grössten** Elements besonders effizient unterstützt
Finden: $\Theta(1)$, Entnehmen: $\Theta(\log n)$
- ▶ **Grundidee analog zu Selectionsort:** Setze sukzessive das **grösste Element an das Ende des unsortierten Bereichs.**
- ▶ Kann den **Heap direkt in der Eingabesequenz repräsentieren**, so dass Heapsort nur konstanten zusätzlichen Speicherplatz benötigt.
- ▶ Die Laufzeit von Heapsort ist leicht überlinear.
- ▶ Wir besprechen die Details später, wenn wir Heaps genauer kennengelernt haben.

A7.4 Nicht vergleichsbasierte Verfahren

Sortierverfahren



Countingsort: Idee

„Sortieren durch Zählen“

- ▶ Annahme: Elemente sind aus Bereich $0, \dots, k - 1$.
- ▶ Laufe einmal über die Eingabesequenz und zähle dabei, wie oft jedes Element vorkommt.
- ▶ Sei $\#i$ die Anzahl der Vorkommen von Element i .
- ▶ Iteriere $i = 0, \dots, k - 1$ und schreibe jeweils $\#i$ -mal Element i in die Sequenz.

Countingsort: Algorithmus

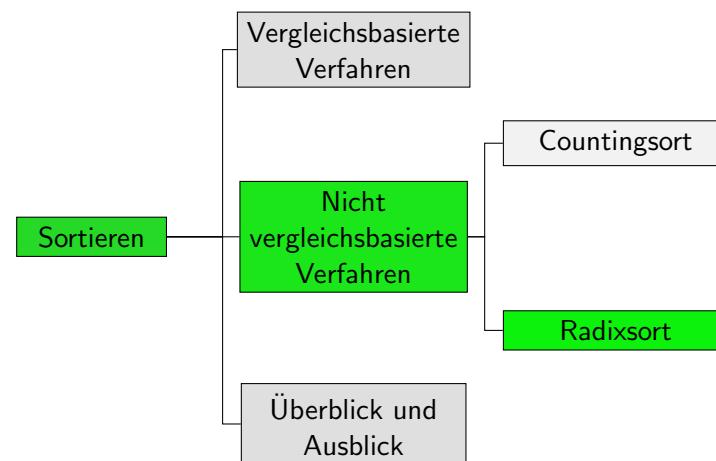
```

1 def sort(array, k):
2     counts = [0] * k # list of k zeros
3     for elem in array:
4         counts[elem] += 1
5
6     pos = 0
7     for i in range(k):
8         occurrences_of_i = counts[i]
9         for j in range(occurrences_of_i):
10             array[pos + j] = i
11             pos += occurrences_of_i

```

Laufzeit: $O(n + k)$ (n Grösse der Eingabesequenz)
 → Für festes k linear

Sortierverfahren



Radixsort: Idee

„Sortieren durch Fachverteilen“

- ▶ Annahme: Schlüssel sind Zahlen im Dezimalsystem
z.B. 763, 983, 96, 286, 462
- ▶ Teile Zahlen nach **letzter** Stelle auf:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|-----|-----|-----|---|---|--|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| | | | | | 462 | 763 | 96 | | | |
| | | | | | | 983 | 286 | | | |
- ▶ Sammle Zahlen von vorne nach hinten/oben nach unten auf
462, 763, 983, 96, 286
- ▶ Teile Zahlen nach **vorletzter** Stelle auf, sammle sie auf.
- ▶ Teile Zahlen nach **drittletzter** Stelle auf, sammle sie auf.
- ▶ usw. bis alle Stellen betrachtet wurden.

Radixsort: Beispiel

► Eingabe: 263, 983, 96, 462, 286

► Aufteilung nach letzter Stelle:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|-----|---|-----|---|----|---|---|---|---|
| 462 | 263 | | | | 96 | | | | |
| 983 | | | 286 | | | | | | |

Aufsammeln ergibt: 462, 263, 983, 96, 286

► Aufteilung nach vorletzter Stelle:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|-----|-----|-----|----|---|---|---|---|
| | | 462 | | 983 | 96 | | | | |
| | | 263 | 286 | | | | | | |

Aufsammeln ergibt: 462, 263, 983, 286, 96

► Aufteilung nach drittletzter Stelle:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|-----|-----|---|---|---|-----|---|---|---|
| 096 | 263 | 462 | | | | 983 | | | |
| | | 286 | | | | | | | |

Aufsammeln ergibt: 96, 263, 286, 462, 983

Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: radix_sort.ipynb

Radixsort: Algorithmus (für beliebige Basis)

```

1 def sort(array, base=10):
2     if not array: # array is empty
3         return
4     iteration = 0
5     max_val = max(array) # identify largest element
6     while base ** iteration <= max_val:
7         buckets = [[] for num in range(base)]
8         for elem in array:
9             digit = (elem // (base ** iteration)) % base
10            buckets[digit].append(elem)
11        pos = 0
12        for bucket in buckets:
13            for elem in bucket:
14                array[pos] = elem
15                pos += 1
16        iteration += 1
  
```

Radixsort: Laufzeit

- m : Maximale Anzahl Stellen in Repräsentation mit gegebener Basis b .
- n : Länge der Eingabesequenz
- Laufzeit in $O(m \cdot (n + b))$

Für festes m und b hat Radixsort lineare Laufzeit.

A7.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren hat mindestens leicht überlineare Laufzeit.
- ▶ Quicksort ist ein Divide-and-Conquer-Verfahren, das die Elemente relativ zu einem Pivotelement aufteilt.
- ▶ Countingsort und Radixsort sind nicht vergleichsbasiert und erlauben (unter bestimmten Restriktionen) ein Sortieren in linearer Zeit.
- ▶ Sie machen jedoch zusätzliche Einschränkungen an die verwendeten Schlüssel.