Algorithmen und Datenstrukturen

A7. Sortieren III

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

11. März 2020

A7.1 Untere Schranke

A7.2 Quicksort

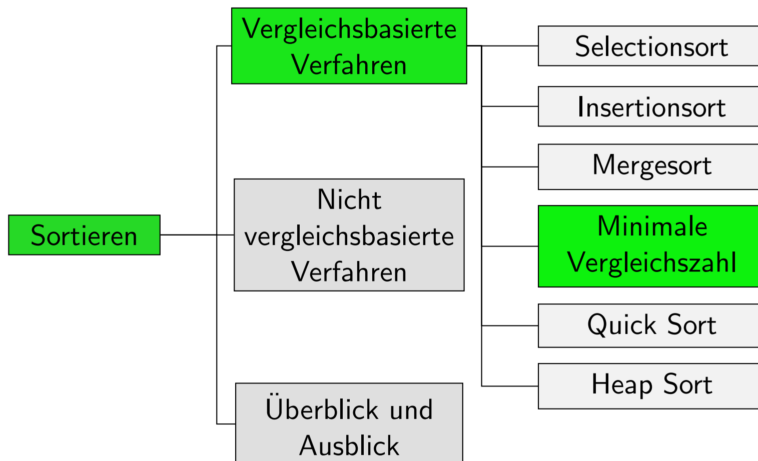
A7.3 Heapsort

A7.4 Nicht vergleichsbasierte Verfahren

A7.5 Zusammenfassung

A7.1 Untere Schranke

Sortierverfahren



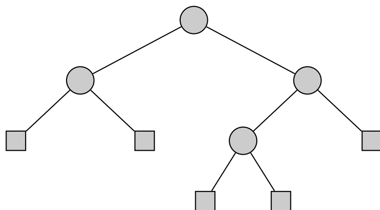
Untere Schranke I

- Mergesort hatte bisher mit $O(n \log_2 n)$ die beste (Worstcase-)Laufzeit.
- Geht es noch besser?
- Wir zeigen: Nicht mit vergleichsbasierten Verfahren!

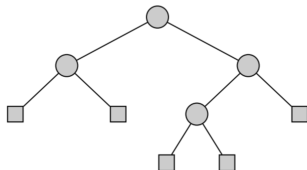
Untere Schranke II

Betrachte beliebigen vergleichsbasierten Sortieralgorithmus A.

- Verhalten hängt nur vom Ergebnis der Schlüsselvergleiche ab.
- Bei jedem Schlüsselvergleich gibt es zwei Möglichkeiten, wie der Algorithmus weiter macht.
- Wir können das graphisch als Baum darstellen.



Untere Schranke III



- Binärbaum: jeder Knoten hat höchstens zwei Nachfolger
- Knoten ohne Nachfolger heissen Blätter (Bild: eckige Knoten).
- Der Knoten ganz oben ist die Wurzel.
- Die Tiefe eines Blattes entspricht der Anzahl von Kanten von der Wurzel zu dem Blatt.

Die maximale Tiefe eines Blattes in einem Binärbaum mit k Blättern ist mindestens $\log_2 k$.

Untere Schranke IV

Was muss der Algorithmus können?

- Annahme: alle Elemente unterschiedlich
- Muss alle Eingaben der Grösse n korrekt sortieren.
- Wir können alle Algorithmen so anpassen, dass sie verfolgen, von welcher Position zu welcher Position die Elemente bewegt werden müssen.
- Das Ergebnis ist dann nicht das sortierte Array, sondern die entsprechende Permutation.
  Beispiel: pos0 $\mapsto$ pos2, pos1 $\mapsto$ pos1, pos2 $\mapsto$ pos0
- Da alle möglichen Eingaben der Grösse n korrekt gelösst werden müssen, muss der Algorithmus alle $n!$ möglichen Permutationen erzeugen können.

Untere Schranke V

- Jedes Blatt in der Baumdarstellung entspricht einer Permutation.
- Bei Eingabegrösse n muss der Baum also mindestens $n!$ Blätter haben.
- Die maximale Tiefe des entsprechenden Baumes ist demnach $\geq \log_2(n!)$.
- Es gibt also eine Eingabe der Grösse n mit $\geq \log_2(n!)$ Schlüsselvergleichen.

Untere Schranke VI

Abschätzung von $\log_2(n!)$

- Es gilt $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$
  $4! = 1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{4}_{\geq 2} \geq 2^2$
- $\log_2(n!) \geq log_2((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) = \frac{n}{2} log_2(\frac{n}{2})$
  $= \frac{n}{2}(\log_2 n + \log_2 \frac{1}{2}) = \frac{n}{2}(\log_2 n - \log_2 2)$
  $= \frac{n}{2}(\log_2 n - 1)$

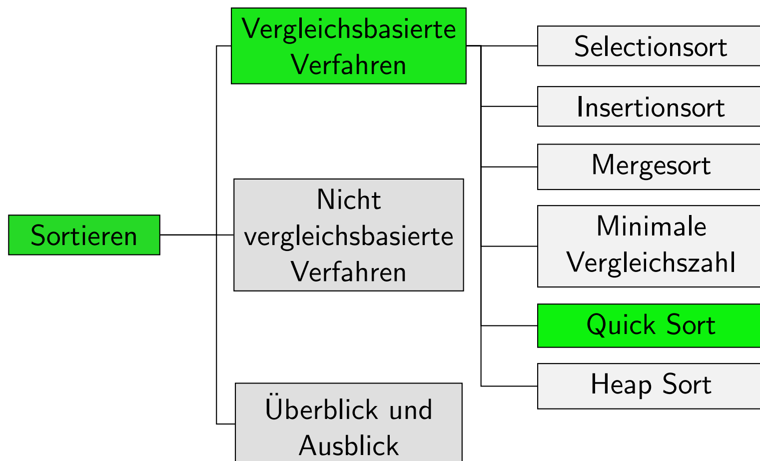
Theorem

Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ viele Schlüsselvergleiche. Damit liegt auch die Laufzeit in $\Omega(n \log n)$.

Mergesort ist asymptotisch optimal.

A7.2 Quicksort

Sortierverfahren



Quicksort: Idee

- Wie Merge-Sort ein Divide-and-Conquer-Verfahren
- Die Sequenz wird nicht wie bei Mergesort nach Positionen aufgeteilt, sondern nach Werten.
- Hierfür wird ein Element P gewählt (das sogenannte Pivotelement).
- Dann wird so umsortiert, dass P an die endgültige Position kommt, vor P nur Elemente $\leq P$ stehen, und hinten nur Elemente $\geq P$.

- Macht man das rekursiv für den vorderen und den hinteren Teil, ist die Sequenz am Ende sortiert.

Quicksort: Algorithmus

```
1  def sort(array):
2      sort_aux(array, 0, len(array)-1)
3
4  def sort_aux(array, lo, hi):
5      if hi <= lo:
6          return
7      choose_pivot_and_swap_it_to_lo(array, lo, hi)
8      pivot_pos = partition(array, lo, hi)
9      sort_aux(array, lo, pivot_pos - 1)
10     sort_aux(array, pivot_pos + 1, hi)
```

Wie wählt man das Pivot-Element?

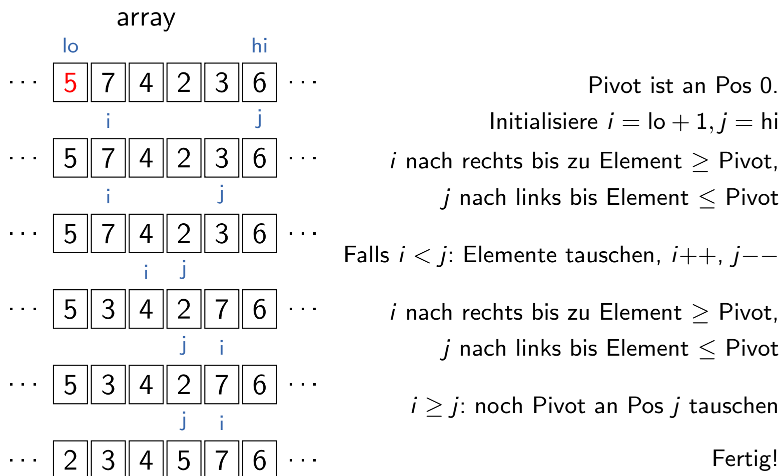
Für die Korrektheit des Verfahrens ist das egal. (Warum?)

Wir können zum Bsp. folgende Strategien wählen:

- Naiv: Nimm immer erstes Element
- Median of Three: Verwende Median aus erstem, mittlerem und letztem Element
- Randomisiert: Wähle zufällig ein Element aus

Gute Pivot-Elemente teilen Sequenz in etwa gleich grosse Bereiche.

Wie macht man die Umsortierung?



Quicksort: Partitionierung

```
1  def partition(array, lo, hi):
2      pivot = array[lo]
3      i = lo + 1
4      j = hi
5      while (True):
6          while i < hi and array[i] < pivot:
7              i += 1
8          while array[j] > pivot:
9              j -= 1
10         if i >= j:
11             break
12
13         array[i], array[j] = array[j], array[i]
14         i, j = i + 1, j - 1
15     array[lo], array[j] = array[j], array[lo]
16     return j
```

Quicksort: Laufzeit I

Best case: Pivot-Element teilt in gleich grosse Bereiche

- $O(\log_2 n)$ rekursive Aufrufe
- jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung
- auf einer Rekursionsebene insgesamt $O(n)$ Vergleiche in Partitionierung

$\rightarrow$ $O(n \log n)$

Worst case: Pivot-Element immer kleinstes oder grösstes Element

- insgesamt n-1 (nichttriviale) rekursive Aufrufe für Länge $n, n-1, \ldots, 2$.
- jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung

$\rightarrow$ $\Theta(n^2)$

Quicksort: Laufzeit II

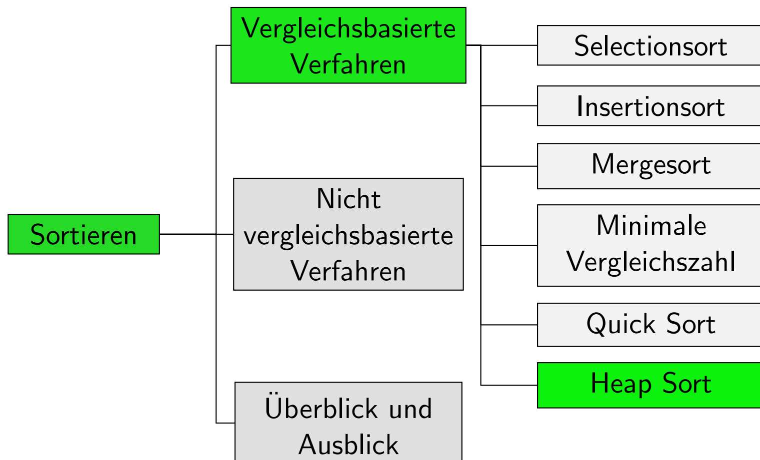
Average case:

- Annahme: n verschiedene Elemente,
  jede der $n!$ Permutationen gleich wahrscheinlich,
  Pivotelement zufällig gewählt
- $O(\log n)$ rekursive Aufrufe
- insgesamt $O(n \log n)$
- etwa 39% langsamer als best case

Bei randomisierter Pivotwahl tritt worst-case quasi nicht auf.
Quicksort wird daher oft als $O(n \log n)$-Verfahren betrachtet.

A7.3 Heapsort

Sortierverfahren

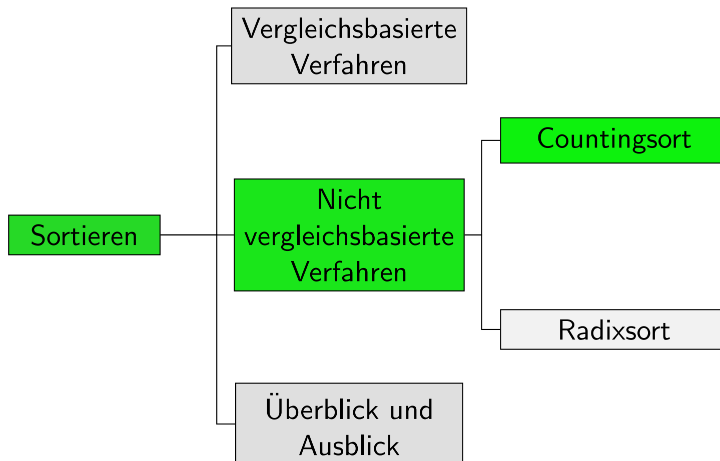


Heapsort

- Heap: Datenstruktur, die das Finden und Entnehmen des grössten Elements besonders effizient unterstützt
  Finden: $\Theta(1)$, Entnehmen: $\Theta(\log n)$
- Grundidee analog zu Selectionsort: Setze sukzessive das grösste Element an das Ende des unsortierten Bereichs.
- Kann den Heap direkt in der Eingabesequenz repräsentieren, so dass Heapsort nur konstanten zusätzlichen Speicherplatz benötigt.
- Die Laufzeit von Heapsort ist leicht überlinear.
- Wir besprechen die Details später, wenn wir Heaps genauer kennengelernt haben.

A7.4 Nicht vergleichsbasierte Verfahren

Sortierverfahren



Countingsort: Idee

„Sortieren durch Zählen“

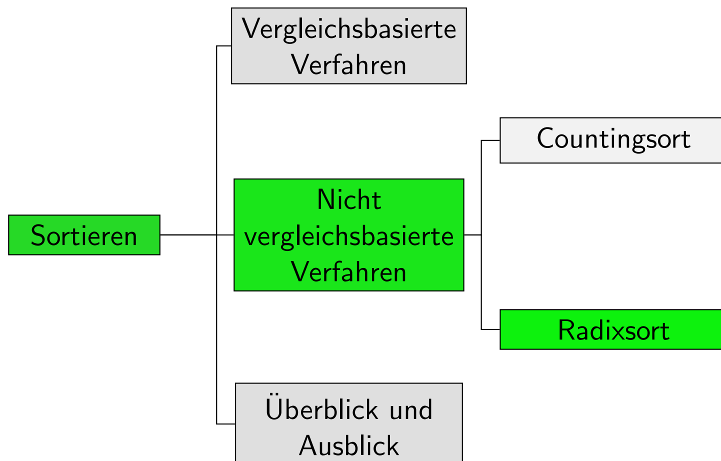
- Annahme: Elemente sind aus Bereich $0, \dots, k-1$.
- Laufe einmal über die Eingabesequenz und zähle dabei, wie oft jedes Element vorkommt.
- Sei $\#i$ die Anzahl der Vorkommen von Element i.
- Iteriere $i = 0, \dots, k-1$ und schreibe jeweils $\#i$-mal Element i in die Sequenz.

Countingsort: Algorithmus

```
1  def sort(array, k):
2      counts = [0] * k  # list of k zeros
3      for elem in array:
4          counts[elem] += 1
5
6      pos = 0
7      for i in range(k):
8          occurrences_of_i = counts[i]
9          for j in range(occurrences_of_i):
10             array[pos + j] = i
11         pos += occurrences_of_i
```

Laufzeit: $O(n + k)$ (n Grösse der Eingabesequenz)
$\rightarrow$ Für festes k linear

Sortierverfahren



Radixsort: Idee

„Sortieren durch Fachverteilen“

- Annahme: Schlüssel sind Zahlen im Dezimalsystem
  z.B. 763, 983, 96, 286, 462
- Teile Zahlen nach letzter Stelle auf:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		462	763			96			
			983			286			

- Sammle Zahlen von vorne nach hinten/oben nach unten auf
  462, 763, 983, 96, 286
- Teile Zahlen nach vorletzter Stelle auf, sammle sie auf.
- Teile Zahlen nach drittletzter Stelle auf, sammle sie auf.
- usw. bis alle Stellen betrachtet wurden.

Radixsort: Beispiel

- Eingabe: 263, 983, 96, 462, 286
- Aufteilung nach letzter Stelle:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		462	263			96			
			983			286			

  Aufsammeln ergibt: 462, 263, 983, 96, 286

- Aufteilung nach vorletzter Stelle:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
						462		983	96
						263		286	

  Aufsammeln ergibt: 462, 263, 983, 286, 96

- Aufteilung nach drittletzter Stelle:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
096		263		462					983
		286							

  Aufsammeln ergibt: 96, 263, 286, 462, 983

Jupyter-Notebook

Jupyter-Notebook: `radix_sort.ipynb`

Radixsort: Algorithmus (für beliebige Basis)

```
1  def sort(array, base=10):
2      if not array:  # array is empty
3          return
4      iteration = 0
5      max_val = max(array) # identify largest element
6      while base ** iteration <= max_val:
7          buckets = [[] for num in range(base)]
8          for elem in array:
9              digit = (elem // (base ** iteration)) % base
10             buckets[digit].append(elem)
11         pos = 0
12         for bucket in buckets:
13             for elem in bucket:
14                 array[pos] = elem
15                 pos += 1
16         iteration += 1
```

Radixsort: Laufzeit

- m: Maximale Anzahl Stellen in Repräsentation mit gegebener Basis b.
- n: Länge der Eingabesequenz
- Laufzeit in $O(m \cdot (n + b))$

Für festes m und b hat Radixsort lineare Laufzeit.

A7.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren hat mindestens leicht überlineare Laufzeit.
- Quicksort ist ein Divide-and-Conquer-Verfahren, das die Elemente relativ zu einem Pivotelement aufteilt.
- Countingsort und Radixsort sind nicht vergleichsbasiert und erlauben (unter bestimmten Restriktionen) ein Sortieren in linearer Zeit.
- Sie machen jedoch zusätzliche Einschränkungen an die verwendeten Schlüssel.