

Algorithmen und Datenstrukturen

A5. Laufzeitanalyse: Einführung, Selection- und Mergesort

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

26. Februar 2020

Algorithmen und Datenstrukturen

26. Februar 2020 — A5. Laufzeitanalyse: Einführung, Selection- und Mergesort

A5.1 Laufzeitanalyse Allgemein

A5.2 Beispiel: Selectionsort

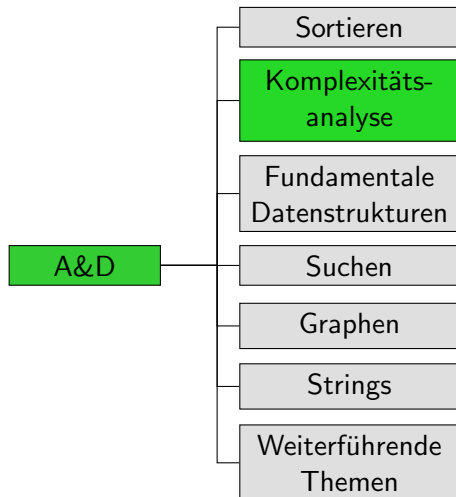
A5.3 Exkurs: Logarithmus

A5.4 Beispiel: Mergesort

A5.5 Zusammenfassung

A5.1 Laufzeitanalyse Allgemein

Inhalt dieser Veranstaltung



Exakte Laufzeitanalyse unrealistisch

- ▶ **Wäre schön:** Formel, die für konkrete Eingabe berechnet, wie lange das Programm läuft.
- ▶ **exakte Laufzeitprognose schwierig**, da zu viele Einflüsse:
 - ▶ Geschwindigkeit und Architektur des Computers
 - ▶ Programmiersprache
 - ▶ Compilerversion
 - ▶ aktuelle Auslastung (was sonst noch läuft)
 - ▶ Cacheverhalten

Wir können und wollen das nicht alles in die Formel aufnehmen.

Laufzeitanalyse: Vereinfachung 1

Zähle Anzahl der Operationen statt die Zeit zu messen!

Was ist eine Operation?

- ▶ Idealerweise: eine Zeile Maschinencode oder – noch präziser – ein Prozessorzyklus
- ▶ Stattdessen: Anweisungen, die konstante Zeit benötigen
 - ▶ konstante Zeit: Laufzeit unabhängig von Eingabe
 - ▶ ignoriere Laufzeitunterschiede verschiedener Anweisungen
 - ▶ z.B. Addition, Zuweisung, Verzweigung, Funktionsaufruf
 - ▶ **grob**: Operation = eine Zeile Code
 - ▶ **aber**: auch beachten, was dahinter steht
z.B. Schritte innerhalb einer aufgerufenen Funktion

Wichtig: Laufzeit ungefähr proportional zu Anzahl Operationen

Laufzeitanalyse: Vereinfachung 2

Schätze ab statt genau zu zählen!

- ▶ Meistens Abschätzung nach oben („obere Schranke“)
Wie viele Schritte braucht das Programm höchstens?
- ▶ Manchmal auch Abschätzung nach unten („untere Schranke“)
Wie viele Schritte werden mindestens ausgeführt?

„Laufzeit“ für Abschätzung der Anzahl ausgeführter Operationen

Laufzeitanalyse: Vereinfachung 3

Abschätzung nur abhängig von Eingabegrösse

- ▶ $T(n)$: Laufzeit bei Eingabe der Grösse n
- ▶ Bei adaptiven Verfahren unterscheiden wir
 - ▶ Beste Laufzeit (best case)
Laufzeit bei günstigstmöglicher Eingabe
 - ▶ Schlechteste Laufzeit (worst case)
Laufzeit bei schlechtestmöglicher Eingabe
 - ▶ Mittlere Laufzeit (average case)
Durchschnitt der Laufzeit über alle Eingaben der Grösse n

Kostenmodelle

Auch: Analyse mit **Kostenmodell**

- ▶ Identifiziere grundlegende Operationen der Algorithmenklasse
z.B. für vergleichsbasierte Sortierverfahren
 - ▶ Vergleich von Schlüsselpaaren
 - ▶ Tausch zweier Elemente oder Bewegung eines Elementes
- ▶ Schätze Anzahl dieser Operationen ab.

Beispiel aus C++-Referenz

function template

std::sort

<algorithm>

```

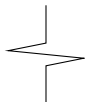
default (1)  template <class RandomAccessIterator>
              void sort (RandomAccessIterator first, RandomAccessIterator last);
custom (2)   template <class RandomAccessIterator, class Compare>
              void sort (RandomAccessIterator first, RandomAccessIterator last, Compare comp);
  
```

Sort elements in range

Sorts the elements in the range `[first, last)` into ascending order.

The elements are compared using operator< for the first version, and *comp* for the second.

Equivalent elements are not guaranteed to keep their original relative order (see `stable_sort`).



Complexity

On average, linearithmic in the `distance` between *first* and *last*: Performs approximately $N \cdot \log_2(N)$ (where N is this distance) comparisons of elements, and up to that many element swaps (or moves).

<http://www.cplusplus.com/reference/algorithm/sort/>

A5.2 Beispiel: Selectionsort

Selectionsort: Algorithmus

```
1 def selection_sort(array):
2     n = len(array)
3     for i in range(n - 1): # i = 0, ..., n-2
4         # find index of minimum element at positions i, ..., n-1
5         min_index = i
6         for j in range(i + 1, n): # j = i+1, ..., n-1
7             if array[j] < array[min_index]:
8                 min_index = j
9         # swap element at position i with minimum element
10        array[i], array[min_index] = array[min_index], array[i]
```

Selectionsort: Analyse I

Wir zeigen: $T(n) \leq c' \cdot n^2$ für $n \geq 1$ und irgendeine Konstante c'

- ▶ Äussere Schleife (3-10) und innere Schleife (6-8)
- ▶ Anzahl Operationen für jede Iteration der äusseren Schleife:
 - ▶ Konstante a für Anzahl Operationen in Zeilen 7 und 8
 - ▶ Konstante b für Anzahl Operationen in Zeilen 5 und 10

i	# Operationen
0	$a(n-1) + b$
1	$a(n-2) + b$
	\dots
n-2	$a \cdot 1 + b$

- ▶ Insgesamt: $T(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (a(n - (i + 1)) + b)$

Selectionsort: Analyse II

$$\begin{aligned}T(n) &= \sum_{i=0}^{n-2} (a(n - (i + 1)) + b) \\&= \sum_{i=1}^{n-1} (a(n - i) + b) \\&= a \sum_{i=1}^{n-1} (n - i) + b(n - 1) \\&= 0.5a(n - 1)n + b(n - 1) \\&\leq 0.5an^2 + b(n - 1) \\&\leq 0.5an^2 + b(n - 1)n \\&\leq 0.5an^2 + bn^2 \\&= (0.5a + b)n^2\end{aligned}$$

\Rightarrow mit $c' = (0.5a + b)$ gilt für $n \geq 1$, dass $T(n) \leq c' \cdot n^2$

Selectionsort: Analyse III

Zu grosszügig abgeschätzt?

Wir zeigen für $n \geq 2$: $T(n) \geq c \cdot n^2$ für irgendeine Konstante c

$$\begin{aligned} T(n) &= \dots = 0.5a(n-1)n + b(n-1) \\ &\geq 0.5a(n-1)n \\ &\geq 0.25an^2 \quad (n-1 \geq 0.5n \text{ für } n \geq 2) \end{aligned}$$

\Rightarrow mit $c = 0.25a$ gilt für $n \geq 2$, dass $T(n) \geq c \cdot n^2$

Theorem

Selectionsort hat *quadratische Laufzeit*, d.h. es gibt Konstanten $c > 0$, $c' > 0$, $n_0 > 0$, so dass für $n \geq n_0$: $cn^2 \leq T(n) \leq c'n^2$.

Selectionsort: Analyse IV

Quadratische Laufzeit:

doppelt so grosse Eingabe, ca. viermal so lange Laufzeit

Was bedeutet das in der Praxis?

- ▶ Annahme: $c = 1$, eine Operation dauert im Schnitt 10^{-8} Sek.
- ▶ Bei 1 Tsd. Elementen warten wir
 $10^{-8} \cdot (10^3)^2 = 10^{-8} \cdot 10^6 = 10^{-2} = 0.02$ Sekunden.
- ▶ Bei 10 Tsd. Elementen $10^{-8} \cdot (10^4)^2 = 1$ Sekunde
- ▶ Bei 100 Tsd. Elementen $10^{-8} \cdot (10^5)^2 = 100$ Sekunden
- ▶ Bei 1 Mio. Elementen $10^{-8} \cdot (10^6)^2$ Sekunden = 2.77 Stunden
- ▶ Bei 1 Mrd. Elementen $10^{-8} \cdot (10^9)^2$ Sekunden = 317 Jahre
1 Mrd. Zahlen bei 4 Bytes/Zahl sind „nur“ 4 GB.

Quadratische Laufzeit problematisch für grosse Eingaben

Selectionsort mit Kostenmodell

```
1 def selection_sort(array):
2     n = len(array)
3     for i in range(n - 1): # i = 0, ..., n-2
4         # find index of minimum element at positions i, ..., n-1
5         min_index = i
6         for j in range(i + 1, n): # j = i+1, ..., n-1
7             if array[j] < array[min_index]:
8                 min_index = j
9         # swap element at position i with minimum element
10        array[i], array[min_index] = array[min_index], array[i]
```

→ $n-1$ mal Tausch zweier Elemente („linear“)

→ $0.5(n-1)n$ Schlüsselvergleiche („quadratisch“)

A5.3 Exkurs: Logarithmus

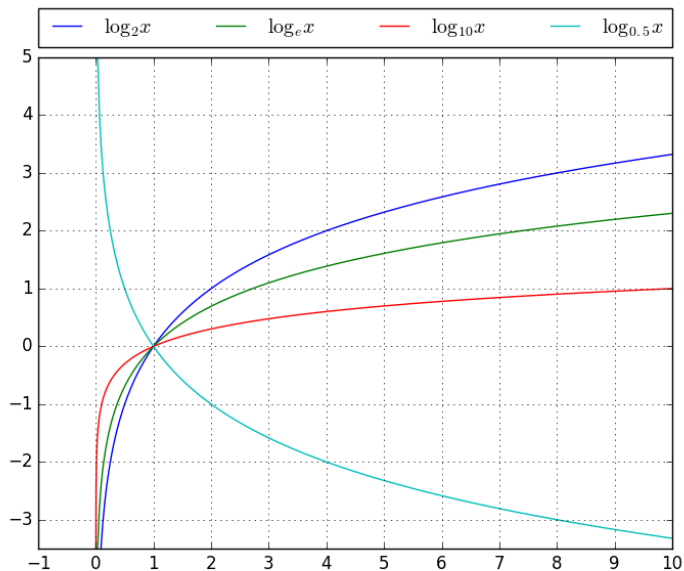
Logarithmus

- ▶ In der Analyse von Mergesort werden wir eine **Logarithmusfunktion** verwendet.
- ▶ Dies ist bei der Analyse von Laufzeiten oft der Fall.
- ▶ Der Logarithmus zur Basis b ist invers zur Exponentialfunktion mit Basis b , also

$$\log_b x = y \text{ gdw. } b^y = x.$$

- ▶ Beispiele: $\log_2 8 = 3$, da $2^3 = 8$
Beispiele: $\log_3 81 = 4$, da $3^4 = 81$
- ▶ $\log_b a$ intuitiv (wenn das glatt aufgeht):
„Wie oft muss man a durch b teilen bis man bei 1 ist?“

Logarithmus: Illustration



Rechenregeln Logarithmus

Die Rechenregeln ergeben sich direkt aus den Regeln

$$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x \text{ und } a^x a^y = a^{x+y}:$$

Produktregel $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

Potenzrechnung $\log_b(x^r) = r \log_b x$

Basisumrechnung $\log_b x = \log_a x / \log_a b$

Summenregel $\log_b(x + y) = \log_b x + \log_b(1 + y/x)$

Logarithmus: Beispielrechnung

Bei der Algorithmenanalyse begegnet man öfters Ausdrücken der Form $a^{\log_b x}$. Wie bekommt man da den Logarithmus aus dem Exponenten?

Beispiel: $5^{\log_2 x}$

Wir verwenden $5 = 2^{\log_2 5}$.

$$\begin{aligned} 5^{\log_2 x} &= (2^{\log_2 5})^{\log_2 x} \\ &= 2^{\log_2 5 \log_2 x} \\ &= 2^{\log_2 x \log_2 5} \\ &= (2^{\log_2 x})^{\log_2 5} \\ &= x^{\log_2 5} \\ &\approx x^{2.32} \end{aligned}$$

A5.4 Beispiel: Mergesort

Merge-Schritt

```
1 def merge(array, tmp, lo, mid, hi):
2     i = lo
3     j = mid + 1
4     for k in range(lo, hi + 1): # k = lo, ..., hi
5         if j > hi or (i <= mid and array[i] <= array[j]):
6             tmp[k] = array[i]
7             i += 1
8         else:
9             tmp[k] = array[j]
10            j += 1
11    for k in range(lo, hi + 1): # k = lo, ..., hi
12        array[k] = tmp[k]
```

Wir analysieren Laufzeit für $m := hi - lo + 1$

Merge-Schritt: Analyse

$$\begin{aligned}T(m) &= c_1 + c_2m + c_3m \\ &\geq (c_2 + c_3)m\end{aligned}$$

Für $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}T(m) &= c_1 + c_2m + c_3m \\ &\leq c_1m + c_2m + c_3m \\ &= (c_1 + c_2 + c_3)m\end{aligned}$$

Theorem

Der Merge-Schritt hat *lineare Laufzeit*, d.h. es gibt Konstanten $c, c', n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$: $cn \leq T(n) \leq c'n$.

Bottom-Up-Mergesort

```
1 def sort(array):
2     n = len(array)
3     tmp = list(array)
4     length = 1
5     while length < n:
6         lo = 0
7         while lo < n - length:
8             mid = lo + length - 1
9             hi = min(lo + 2 * length - 1, n - 1)
10            merge(array, tmp, lo, mid, hi)
11            lo += 2 * length
12        length *= 2
```

Wir verwenden für die Abschätzung:

- c_1 Zeilen 2–4 **Annahme:** merge benötigt
- c_2 Zeilen 6 und 12 c_4 $(hi-lo+1)$ Operationen.
- c_3 Zeilen 8,9,11

Bottom-Up-Mergesort: Analyse I

Annahme: $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$

Iterationen der äusseren Schleife (m für $hi-lo+1$):

- ▶ Iteration 1: $n/2$ mal innere Schleife mit Merge für $m = 2$
 $c_2 + n/2(c_3 + 2c_4) = c_2 + 0.5c_3n + c_4n$
- ▶ Iteration 2: $n/4$ mal innere Schleife mit Merge für $m = 4$
 $c_2 + n/4(c_3 + 4c_4) = c_2 + 0.25c_3n + c_4n$
- ▶ ...
- ▶ Äussere Schleife endet nach letzter Iteration ℓ .
- ▶ Iteration ℓ : 1 mal innere Schleife mit Merge für $m = n$
 $c_2 + n/n(c_3 + nc_4) = c_2 + c_3 + c_4n$

Insgesamt $T(n) \leq c_1 + \ell(c_2 + c_3n + c_4n) \leq \ell(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)n$

Bottom-Up-Mergesort: Analyse II

Wie gross ist ℓ ?

- ▶ In Iteration i ist für den Merge-Schritt $m = 2^i$
- ▶ In Iteration ℓ hat Merge-Schritt $m = 2^\ell = n$
- ▶ Da $n = 2^k$ ist $\ell = k = \log_2 n$.

Mit $c := c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ erhalten wir $T(n) \leq cn \log_2 n$.

Bottom-Up-Mergesort: Analyse III

Was, wenn n keine Zweierpotenz, also $2^{k-1} < n < 2^k$?

- ▶ Trotzdem k Iterationen der äusseren Schleife.
- ▶ Innere Schleife verwendet nicht mehr Operationen.
- ▶ $T(n) \leq cnk = cn(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) \leq 2cn \log_2 n$ (für $k > 2$)

Bottom-Up-Mergesort: Analyse IV

Ähnliche Abschätzung auch für untere Schranke möglich.

→ Übung

Theorem

*Bottom-Up-Mergesort hat **leicht überlineare Laufzeit**, d.h. es gibt Konstanten $c, c', n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $cn \log_2 n \leq T(n) \leq c'n \log_2 n$.*

Leicht überlineare Laufzeit

Leicht überlineare Laufzeit $n \log_2 n$:

→ doppelt so grosse Eingabe, etwas mehr als doppelt so lange Laufzeit

Was bedeutet das in der Praxis?

- ▶ Annahme: $c = 1$, eine Operation dauert im Schnitt 10^{-8} Sek.
- ▶ Bei 1 Tsd. Elementen warten wir
 $10^{-8} \cdot 10^3 \log_2(10^3) \approx 0.0001$ Sekunden.
- ▶ Bei 10 Tsd. Elementen ≈ 0.0013 Sekunden
- ▶ Bei 100 Tsd. Elementen ≈ 0.017 Sekunden
- ▶ Bei 1 Mio. Elementen ≈ 0.2 Sekunden
- ▶ Bei 1 Mrd. Elementen ≈ 299 Sekunden

Laufzeit $n \log_2 n$ nicht viel schlechter als lineare Laufzeit

Mergesort mit Kostenmodell I

Schlüsselvergleiche

- ▶ Werden nur in `merge` durchgeführt.
 - ▶ Mergen zweier Teilfolgen der Länge m und n benötigt bestenfalls $\min(n, m)$ und schlimmstenfalls $n + m - 1$ Vergleiche.
 - ▶ Bei zwei etwa gleich langen Teilfolgen sind das **linear** viele Vergleiche, d.h. es gibt $c, c' > 0$, so dass Anzahl Vergleiche zwischen cn und $c'n$ liegt.
- Anzahl der zum Sortieren einer Sequenz notwendigen Schlüsselvergleiche ist **leicht überlinear** in der Länge der Sequenz (analog zu Laufzeitanalyse).

Mergesort mit Kostenmodell II

Elementbewegungen

- ▶ Werden nur in `merge` durchgeführt.
- ▶ $2n$ Bewegungen für Sequenz der Länge n .
- ▶ Insgesamt für Mergesort **leicht überlinear** (analog zu Schlüsselvergleichen)

A5.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ Bei der Laufzeitanalyse **schätzen** wir die **Anzahl der ausgeführten Operationen ab**.
 - ▶ Wir zählen nicht exakt.
 - ▶ Wir ignorieren, wie lange eine Operation tatsächlich dauert.
 - ▶ Hauptsache: Laufzeit ungefähr proportional zu Anzahl Operationen.
- ▶ **Selectionsort** hat **quadratische Laufzeit** und benötigt linear viele Vertauschungen und quadratisch viele Schlüsselvergleiche.
- ▶ **Mergesort** hat **leicht überlineare Laufzeit, Schlüsselvergleiche und Elementbewegungen**.