# Algorithmen und Datenstrukturen

## A4. Sortieren II: Mergesort

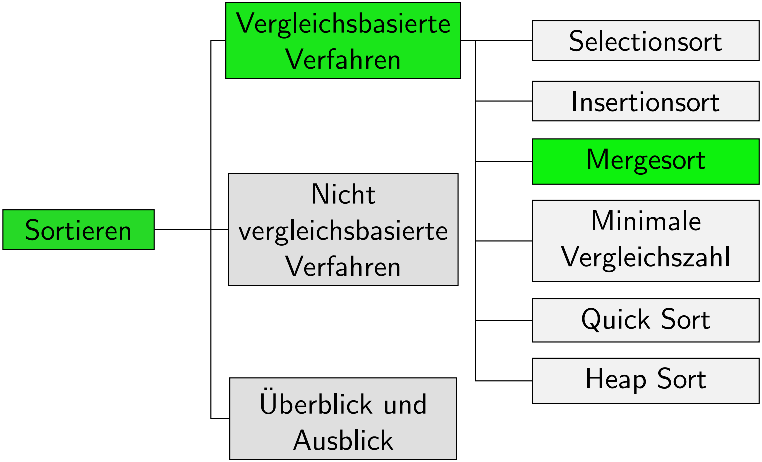
Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

20. Februar 2020

# Mergesort

# Sortierverfahren



# Mergesort: Idee

- Beobachtung: zwei bereits sortierte Sequenzen lassen sich leicht zu einer sortierten Sequenz vereinen.
- Sequenzen mit einem oder keinem Element sind sortiert.
- Idee für längere Sequenzen:
  - Teile Eingabesequenz in zwei etwa gleich grosse Teilbereiche
  - Rekursiver Aufruf für beide Teilmengen
  - Füge nun sortierte Teilbereiche zusammen.
- Teile-und-Herrsche-Ansatz (divide and conquer)

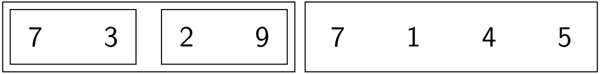
# Mergesort: Illustration

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 3 | 2 | 9 | 7 | 1 | 4 | 5 |

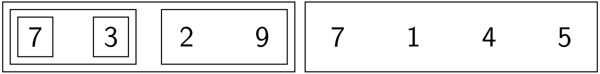
# Mergesort: Illustration

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 3 | 2 | 9 | 7 | 1 | 4 | 5 |

# Mergesort: Illustration



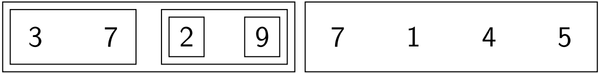
# Mergesort: Illustration



# Mergesort: Illustration

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 2 | 9 | 7 | 1 | 4 | 5 |

# Mergesort: Illustration



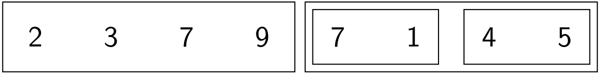
# Mergesort: Illustration

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 2 | 9 | 7 | 1 | 4 | 5 |

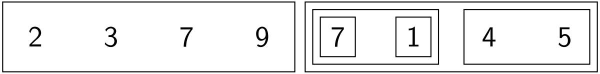
# Mergesort: Illustration

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 7 | 9 | 7 | 1 | 4 | 5 |

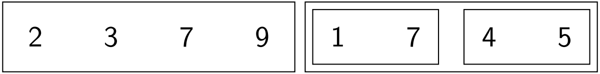
# Mergesort: Illustration



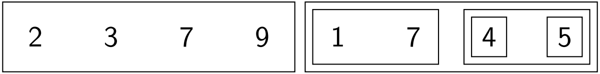
# Mergesort: Illustration



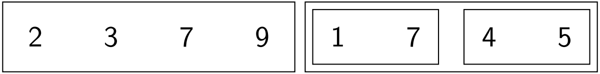
# Mergesort: Illustration



# Mergesort: Illustration



# Mergesort: Illustration



# Mergesort: Illustration

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 7 | 9 | 1 | 4 | 5 | 7 |

# Mergesort: Illustration

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 7 | 9 |

# Merge-Schritt

# Verbinden der Teillösungen

- Indizes lo $\leq$ mid $<$ hi
- Annahme: array[lo] bis array[mid] und array[mid+1] bis array[hi] sind bereits sortiert
- Ziel: array[lo] bis array[hi] ist sortiert
- Idee: gehe parallel von vorne nach hinten durch beide Teilbereiche und sammle das jeweils kleinere Element auf
- Verwendet zusätzlichen Speicher für aufgesammelte Werte

# Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.
Initialisierung: i := lo, j := mid + 1, k := lo

a

| | lo,i | | mid | j | hi | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ··· | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | ··· |

tmp

| | k | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ··· | | | | | | ··· |

# Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.
Initialisierung: i := lo, j := mid + 1, k := lo

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | a | | | | | | | tmp | | | | | |
| | lo,i | | mid | j | hi | | | k | | | | | | | |
| ··· | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | ··· | ··· | | | | | | ··· | | |
| | lo | i | mid | j | hi | | | | k | | | | | | $a[i] \leq a[j] \Rightarrow tmp[k] = a[i]$ |
| ··· | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | ··· | ··· | 2 | | | | | ··· | | |

# Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.
Initialisierung: i := lo, j := mid + 1, k := lo

a

| | lo,i | | mid | j | hi | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| … | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | … |

tmp

| | k | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| … | | | | | | … |

| | lo | i | mid | j | hi | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| … | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | … |

| | | k | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| … | 2 | | | | | … |

a[i]≤a[j] ⇒ tmp[k] = a[i]

| | lo | | mid,i | j | hi | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| … | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | … |

| | | | k | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| … | 2 | 4 | | | | … |

a[i]≤a[j] ⇒ tmp[k] = a[i]

# Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.
Initialisierung: $i := lo$, $j := mid + 1$, $k := lo$

| | a | | tmp | |
|---|---|---|---|---|
| | lo,i — mid — j — hi | | k | |
| | ··· 2 4 5 4 7 ··· | | ··· _ _ _ _ _ ··· | |
| | lo — i — mid — j — hi | | k | $a[i] \le a[j] \Rightarrow tmp[k] = a[i]$ |
| | ··· 2 4 5 4 7 ··· | | ··· 2 _ _ _ _ ··· | |
| | lo — mid,i — j — hi | | k | $a[i] \le a[j] \Rightarrow tmp[k] = a[i]$ |
| | ··· 2 4 5 4 7 ··· | | ··· 2 4 _ _ _ ··· | |
| | lo — mid,i — hi,j | | k | $a[j] < a[i] \Rightarrow tmp[k] = a[j]$ |
| | ··· 2 4 5 4 7 ··· | | ··· 2 4 4 _ _ ··· | |

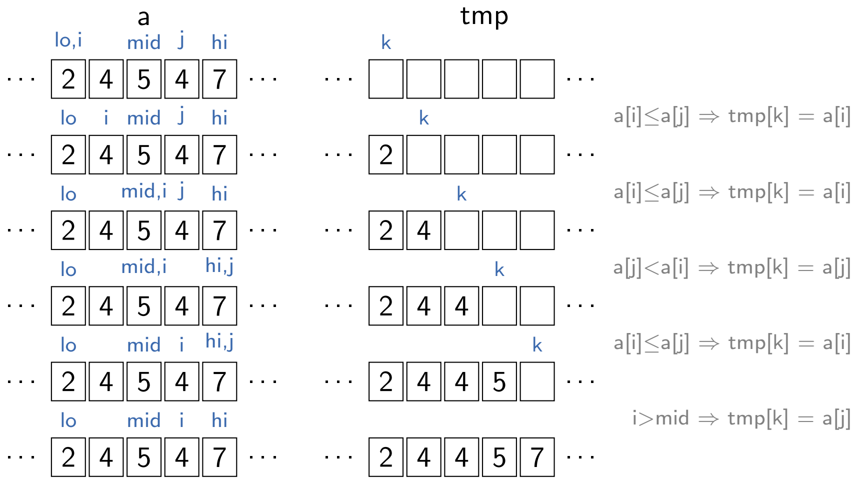
# Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.
Initialisierung: $i := lo$, $j := mid + 1$, $k := lo$

| | a | | | | | | | tmp | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | lo,i | | mid | j | hi | | | k | | | | | | |
| … | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | … | … | | | | | | … | |
| | lo | i | mid | j | hi | | | | k | | | | | $a[i] \leq a[j] \Rightarrow tmp[k] = a[i]$ |
| … | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | … | … | 2 | | | | | … | |
| | lo | | mid,i | j | hi | | | | | k | | | | $a[i] \leq a[j] \Rightarrow tmp[k] = a[i]$ |
| … | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | … | … | 2 | 4 | | | | … | |
| | lo | | mid,i | | hi,j | | | | | | k | | | $a[j] < a[i] \Rightarrow tmp[k] = a[j]$ |
| … | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | … | … | 2 | 4 | 4 | | | … | |
| | lo | | mid | i | hi,j | | | | | | | k | | $a[i] \leq a[j] \Rightarrow tmp[k] = a[i]$ |
| … | 2 | 4 | 5 | 4 | 7 | … | … | 2 | 4 | 4 | 5 | | … | |

# Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.
Initialisierung: i := lo, j := mid + 1, k := lo



# Verbinden der Teillösungen: Algorithmus

```
def merge(array, tmp, lo, mid, hi):
    i = lo
    j = mid + 1
    for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo,...,hi
        if j > hi or (i <= mid and array[i] <= array[j]):
            tmp[k] = array[i]
            i += 1
        else:
            tmp[k] = array[j]
            j += 1
    for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo,...,hi
        array[k] = tmp[k]
```

# Verbinden der Teillösungen: Algorithmus

```
def merge(array, tmp, lo, mid, hi):
    i = lo
    j = mid + 1
    for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo,...,hi
        if j > hi or (i <= mid and array[i] <= array[j]):
            tmp[k] = array[i]
            i += 1
        else:
            tmp[k] = array[j]
            j += 1
    for k in range(lo, hi + 1):  # k = lo,...,hi
        array[k] = tmp[k]
```

Auch korrekt für lo = mid = hi

# Jupyter-Notebook

Jupyter-Notebook: `merge_sort.ipynb`

# Top-Down-Mergesort

# Mergesort: Algorithmus

rekursive Top-Down-Version

```
def sort(array):
    tmp = [0] * len(array)  # [0,...,0] with same size as array
    sort_aux(array, tmp, 0, len(array) - 1)

def sort_aux(array, tmp, lo, hi):
    if hi <= lo:
        return
    mid = lo + (hi - lo) // 2
    # //: Division mit Abrunden
    sort_aux(array, tmp, lo, mid)
    sort_aux(array, tmp, mid + 1, hi)
    merge(array, tmp, lo, mid, hi)
```

# Mögliche Verbesserungen

- Auf kurzen Sequenzen ist Insertionsort schneller als Mergesort
  $\rightarrow$ verwende Insertionsort wenn hi - lo klein

# Mögliche Verbesserungen

- Auf kurzen Sequenzen ist Insertionsort schneller als Mergesort
  $\rightarrow$ verwende Insertionsort wenn hi - lo klein
- Breche Merge-Schritt direkt ab, falls Positionen lo bis hi bereits vollständig sortiert

```
if array[mid] <= array[mid + 1]:
    return
```

# Mögliche Verbesserungen

- Auf kurzen Sequenzen ist Insertionsort schneller als Mergesort
  → verwende Insertionsort wenn hi - lo klein
- Breche Merge-Schritt direkt ab, falls Positionen lo bis hi bereits vollständig sortiert

```
if array[mid] <= array[mid + 1]:
    return
```

- Kopieren von `tmp`-Ergebnis in merge kostet Zeit
  → tausche Rolle von `array` und `tmp`
  bei jedem rekursiven Aufruf

# Merge-Schritt: Korrektheit

- Invariante: Am Ende jeder Schleifeniteration ist
  - `tmp[k]` $\leq$ `array[m]` für alle $i \leq m \leq$ mid, und
  - `tmp[k]` $\leq$ `array[n]` für alle $j \leq n \leq$ hi.
- `tmp` wird von vorne nach hinten beschrieben.
- Nach letzter Schleifeniteration gilt für alle lo $\leq r < s \leq$ hi, dass `tmp[`$r$`]`$\leq$`tmp[`$s$`]` (= Bereich ist sortiert).

# Mergesort: Korrektheit

`sort_aux`:

- Induktionsbeweis über Bereichslänge $\mathsf{hi} - \mathsf{lo}$
- Basis $\mathsf{hi} - \mathsf{lo} = -1$: leerer Bereich ist sortiert.
- Basis $\mathsf{hi} - \mathsf{lo} = 0$: Bereich mit nur einem Element ist sortiert.

# Mergesort: Korrektheit

`sort_aux`:

- Induktionsbeweis über Bereichslänge $\text{hi} - \text{lo}$
- Basis $\text{hi} - \text{lo} = -1$: leerer Bereich ist sortiert.
- Basis $\text{hi} - \text{lo} = 0$: Bereich mit nur einem Element ist sortiert.
- Induktionshypothese: Mergesort ist korrekt für alle $\text{hi} - \text{lo} < m$
- Induktionsschritt $(m - 1 \rightarrow m)$:

# Mergesort: Korrektheit

`sort_aux`:

- Induktionsbeweis über Bereichslänge hi − lo
- Basis hi − lo = −1: leerer Bereich ist sortiert.
- Basis hi − lo = 0: Bereich mit nur einem Element ist sortiert.
- Induktionshypothese: Mergesort ist korrekt für alle hi − lo $< m$
- Induktionsschritt $(m - 1 \to m)$:
  Mergesort macht zwei rekursive Aufrufe mit
  hi − lo $\leq m/2 + 1$, danach ist die Eingabe jeweils zwischen lo und mid und zwischen mid + 1 und hi sortiert (lt. Ind.-hyp).

# Mergesort: Korrektheit

`sort_aux`:

- Induktionsbeweis über Bereichslänge $\text{hi} - \text{lo}$
- Basis $\text{hi} - \text{lo} = -1$: leerer Bereich ist sortiert.
- Basis $\text{hi} - \text{lo} = 0$: Bereich mit nur einem Element ist sortiert.
- Induktionshypothese: Mergesort ist korrekt für alle $\text{hi} - \text{lo} < m$
- Induktionsschritt $(m - 1 \to m)$:
  Mergesort macht zwei rekursive Aufrufe mit
  $\text{hi} - \text{lo} \leq m/2 + 1$, danach ist die Eingabe jeweils zwischen lo und mid und zwischen $\text{mid} + 1$ und hi sortiert (lt. Ind.-hyp).

  Wir wissen bereits, dass der Merge-Schritt korrekt ist, also ist am Ende der gesamte Bereich zwischen lo und hi sortiert.

# Mergesort: Korrektheit

`sort_aux`:

- Induktionsbeweis über Bereichslänge $\mathrm{hi} - \mathrm{lo}$
- Basis $\mathrm{hi} - \mathrm{lo} = -1$: leerer Bereich ist sortiert.
- Basis $\mathrm{hi} - \mathrm{lo} = 0$: Bereich mit nur einem Element ist sortiert.
- Induktionshypothese: Mergesort ist korrekt für alle $\mathrm{hi} - \mathrm{lo} < m$
- Induktionsschritt $(m - 1 \rightarrow m)$:
  Mergesort macht zwei rekursive Aufrufe mit $\mathrm{hi} - \mathrm{lo} \leq m/2 + 1$, danach ist die Eingabe jeweils zwischen lo und mid und zwischen $\mathrm{mid} + 1$ und hi sortiert (lt. Ind.-hyp).

  Wir wissen bereits, dass der Merge-Schritt korrekt ist, also ist am Ende der gesamte Bereich zwischen lo und hi sortiert.

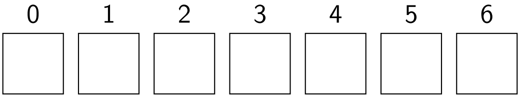
Mergesort: Ruft `sort_aux` für gesamten Bereich auf,
daher ist am Ende die gesamte Eingabe sortiert.

# Mergesort: Eigenschaften

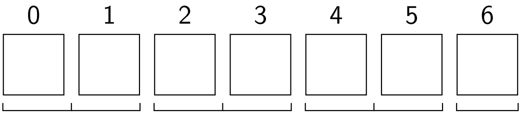
- nicht in-place: verwendet zusätzlichen Speicherplatz für `tmp` und für Aufrufstapel (call stack)
- Zeitbedarf: nicht adaptiv (ausser mit Mergeabbruch-Verbesserung)
  genauere Analyse: nächste Woche
- stabil: `merge` präferiert `array[i]`, wenn `array[i]` gleich `array[j]`.

# Bottom-Up-Mergesort

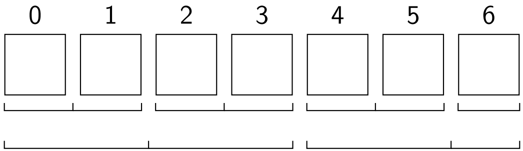
# Bottom-Up-Version



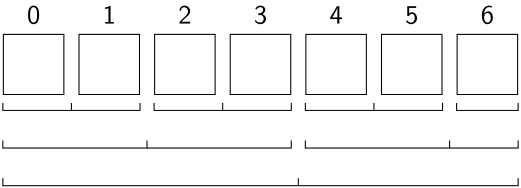
# Bottom-Up-Version



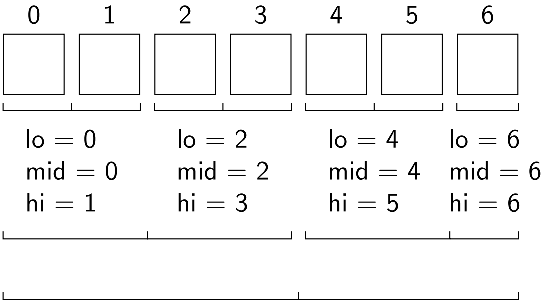
# Bottom-Up-Version



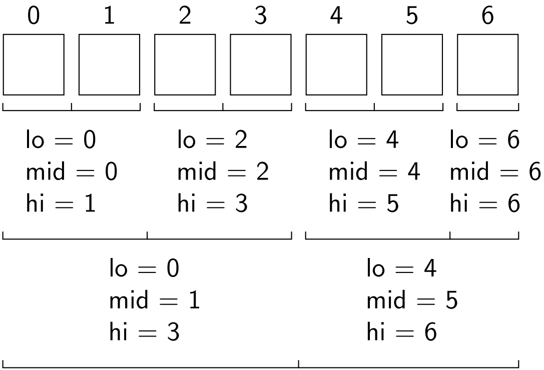
# Bottom-Up-Version



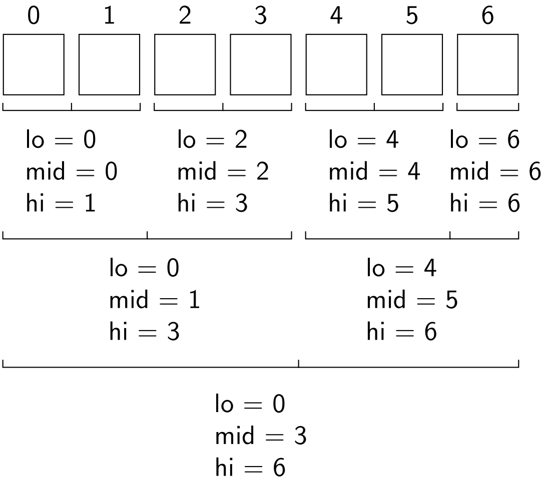
# Bottom-Up-Version



# Bottom-Up-Version



# Bottom-Up-Version



# Bottom-Up-Mergesort: Algorithm

iterative Bottom-Up-Version

```
def sort(array):
    n = len(array)
    tmp = [0] * n
    length = 1
    while length < n:
        lo = 0
        while lo < n - length:
            mid = lo + length - 1
            hi = min(lo + 2 * length - 1, n - 1)
            merge(array, tmp, lo, mid, hi)
            lo += 2 * length
        length *= 2
```

# Zusammenfassung

# Zusammenfassung

- Mergesort ist ein Teile-und-Herrsche-Verfahren, das den zu sortierenden Bereich in zwei etwa gleich grosse Bereiche teilt.
- Der Merge-Schritt führt zwei bereits sortierte Teilbereiche zusammen.
- Mergesort ist stabil, arbeitet aber nicht in-place.
- Die Top-Down-Variante ist ein rekursives Verfahren.
- Die Bottom-Up-Variante ist ein iteratives Verfahren.