Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 10 — Lösungen

Aufgabe 10.1 (1+1+1.5+1.5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Geben Sie in jedem Fall einen kurzen Beweis an (2–3 Sätze genügen).

(a) Sei X ein NP-hartes Problem und Y ein Problem, für das $X \leq_\mathrm{p} Y$ gilt. Dann ist Y NP-hart.

Lösung:

Richtig. Laut Definition ist ein Problem Y NP-hart, wenn $A \leq_\mathrm{p} Y$ für alle Probleme $A \in \mathrm{NP}$ gilt. Sei also A ein beliebiges Problem in NP. Da X NP-hart ist, gilt $A \leq_\mathrm{p} X$, und mit $X \leq_\mathrm{p} Y$ folgt (wegen der Transitivität der Reduzierbarkeit) auch $A \leq_\mathrm{p} Y$.

(b) Sei X ein NP-hartes Problem. Wenn für X ein deterministischer polynomieller Algorithmus existiert, dann existiert auch für DirHamiltonCycle ein deterministischer polynomieller Algorithmus.

Lösung:

Richtig. Wir wissen: DirHamiltonCycle $\in$ NP (Kapitel E1). Wenn X NP-hart ist, gilt DirHamiltonCycle $\leq_\mathrm{p} X$. Aus $X \in \mathrm{P}$ folgt dann auch DirHamiltonCycle $\in$ P mit Teil 1 des Satzes über die Eigenschaften von polynomiellen Reduktionen (Kapitel E2).

(c) Es gibt NP-vollständige Probleme X und Y, so dass für X ein deterministischer polynomieller Algorithmus existiert, aber nicht für Y.

Lösung:

Falsch. NP-vollständige Probleme liegen nach Definition in NP, und damit gilt mit dem Argument im vorigen Aufgabenteil: wenn jeweils eines der Probleme in P liegt, dann auch das andere.

(d) Sei $Y \subseteq \Sigma^*$ ein beliebiges Problem mit $Y \neq \emptyset$ und $Y \neq \Sigma^*$. Für alle $X \in \mathrm{P}$ gilt $X \leq_\mathrm{p} Y$.

Lösung:

Richtig. Sei hierzu $z \in Y$ eine beliebig gewählte „Ja-Antwort" für Y (möglich, da $Y \neq \emptyset$) und $z' \in \Sigma^* \setminus Y$ eine beliebig gewählte „Nein-Antwort" für Y (möglich, da $Y \neq \Sigma^*$). Betrachte nun die folgende Abbildung f für Eingabewörter von X:

$$f(w) = \begin{cases} z & \text{falls } w \in X \\ z' & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Wahl von z und z' gilt offenbar $w \in X$ gdw. $f(w) \in Y$, und wegen $X \in \mathrm{P}$ ist f in polynomieller Zeit berechenbar. Die Reduktion f zeigt also, dass $X \leq_\mathrm{p} Y$ gilt.

Aufgabe 10.2 (Polynomielle Reduktion, 4 + 1 Punkte)

Ein *Hamiltonpfad* ist analog zu einem Hamiltonkreis definiert (vgl. Kapitel E1), nur dass ein einfacher Pfad statt eines Kreises gesucht ist. Genauer: ein Hamiltonpfad in einem gerichteten Graphen $\langle V, E\rangle$ ist eine Knotenfolge $\pi = \langle v_1, \dots, v_n\rangle$, die einen Pfad definiert ($\langle v_i, v_{i+1}\rangle \in E$ für alle $1 \leq i < n$) und jeden Knoten des Graphen genau einmal enthält.

Betrachten Sie das Entscheidungsproblem DirHamiltonPath:

- *Gegeben:* gerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$
- *Gefragt:* Enthält G einen Hamiltonpfad?

(a) Beweisen Sie, dass DirHamiltonPath NP-hart ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass das Problem DirHamiltonCycle NP-vollständig ist.

Lösung:

Wir müssen zeigen, dass

$$\text{DirHamiltonCycle} \leq_{\text{p}} \text{DirHamiltonPath}.$$

Wir müssen also zu jedem gegebenen gerichteten Graphen G in polynomieller Zeit einen gerichteten Graphen $f(G)$ konstruieren, so dass gilt: G enthält einen Hamiltonkreis gdw. $f(G)$ enthält einen Hamiltonpfad.

Sei $G = \langle V, E \rangle$ der gegebene Graph. Ohne Einschränkung sei $|V| \geq 2$. (Den Spezialfall $|V| \leq 1$ kann man leicht separat behandeln.)

Idee: Wir wählen einen beliebigen Knoten $\bar{v} \in V$ aus. Wir können jeden Hamiltonkreis von G so aufschreiben, dass $\bar{v}$ am Anfang und Ende steht, also der Kreis die Form $\langle \bar{v}, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \bar{v} \rangle$ hat, wobei $n = |V|$. Wir sorgen nun dafür, dass jeder Hamiltonkreis in G eineindeutig einem Hamiltonpfad in $f(G)$ entspricht, indem wir den Knoten $\bar{v}$ in $f(G)$ durch zwei neue Knoten ersetzen: einen Knoten $\bar{v}_{\text{start}}$, der nur die ausgehenden Kanten von $\bar{v}$ aufweist (und keine eingehenden) und einen Knoten $\bar{v}_{\text{end}}$, der nur die eingehenden Kanten von $\bar{v}$ aufweist (und keine ausgehenden).

Formal: $f(\langle V, E \rangle) = \langle V', E' \rangle$ mit

$$\begin{aligned}
V' &= (V \setminus \{\bar{v}\}) \cup \{\bar{v}_{\text{start}}, \bar{v}_{\text{end}}\} \\
E' &= \{\langle u, v \rangle \mid \langle u, v \rangle \in E, u \neq \bar{v}, v \neq \bar{v}\} \cup \\
&\quad\ \{\langle \bar{v}_{\text{start}}, v \rangle \mid \langle \bar{v}, v \rangle \in E, v \neq \bar{v}\} \cup \\
&\quad\ \{\langle u, \bar{v}_{\text{end}} \rangle \mid \langle u, \bar{v} \rangle \in E, u \neq \bar{v}\}.
\end{aligned}$$

wobei $\bar{v}$ ein beliebiges Element von V ist und $\bar{v}_{\text{start}}, \bar{v}_{\text{end}}$ zwei neue Knoten.

Diese Funktion kann man sicher in polynomieller Zeit berechnen.

Da die beiden neuen Knoten nur ausgehende bzw. nur eingehende Kanten aufweisen, muss jeder Hamiltonpfad in $f(G)$ zwangsläufig bei $\bar{v}_{\text{start}}$ beginnen und bei $\bar{v}_{\text{end}}$ enden, und es gilt allgemein $\langle \bar{v}, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \bar{v} \rangle$ ist ein Hamiltonkreis in G gdw. $\langle \bar{v}_{\text{start}}, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \bar{v}_{\text{end}} \rangle$ ist ein Hamiltonpfad in $f(G)$:

$\Rightarrow$: Die Kanten $\langle v_i, v_{i+1} \rangle$ existieren unverändert in $f(G)$ für alle $1 \leq i < n-1$. Die Kanten $\langle \bar{v}_{\text{start}}, v_1 \rangle$ und $\langle v_{n-1}, \bar{v}_{\text{end}} \rangle$ existieren in $f(G)$, da in G die Kanten $\langle \bar{v}, v_1 \rangle$ und $\langle v_{n-1}, \bar{v} \rangle$ existieren. Es handelt sich also um einen Pfad. Die Knoten $\bar{v}, v_1, \ldots, v_{n-1}$ sind paarweise unterschiedlich. Daher sind auch die Knoten $\bar{v}_{\text{start}}, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \bar{v}_{\text{end}}$ paarweise unterschiedlich. Der Pfad besucht also jeden Knoten in $f(G)$ genau ein mal.

$\Leftarrow$: Analog.

Dies beweist die Reduktionseigenschaft.

(b) Ist DirHamiltonPath NP-vollständig? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung:

Ja. Damit ein Problem NP-vollständig ist muss es (1) NP-hart sein und (2) in NP liegen. (1) haben wir in Teilaufgabe (a) gezeigt. (2) ist erfüllt, wenn es einen nichtdeterministischen polynomiellen Algorithmus für das Problem gibt. Wir können (wie in der Vorlesung) in polynomieller Zeit einen Pfad raten und dann (wie in der Vorlesung) ebenfalls in polynomieller Zeit überprüfen, ob es sich um einen Hamiltonpfad handelt.