Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 8 — Lösungen

Aufgabe 8.1 (Transitivität von Reduktionen, 1 Punkt)

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C: Wenn $A \leq B$ und $B \leq C$, dann auch $A \leq C$.

Lösung:

Sei $A \subseteq \Sigma_A^*$, $B \subseteq \Sigma_B^*$ und $C \subseteq \Sigma_C^*$. Da $A \leq B$, gibt es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma_A^* \to \Sigma_B^*$, so dass $x \in A$ gdw. $f(x) \in B$. Aus $B \leq C$ folgt analog, dass es eine Funktion $g : \Sigma_B^* \to \Sigma_C^*$ gibt, so dass $x \in B$ gdw. $g(x) \in C$.
Wir definieren $h : \Sigma_A^* \to \Sigma_C^*$ als $g \circ f$ (d.h. $h(x) = g(f(x))$ für alle $x \in \Sigma_A^*$). Die Funktion ist total und berechenbar, da die Komposition von totalen und berechenbaren Funktionen wieder total und berechenbar ist. Insgesamt gilt dann, dass $x \in A$ gdw. $f(x) \in B$ gdw. $g(f(x)) \in C$ gdw. $h(x) \in C$. Wir schliessen daraus, dass A (mit h) auf C reduzierbar ist: $A \leq C$.

Aufgabe 8.2 (Unentscheidbarkeit des Leerheitsproblems, 4 Punkte)

Das *Leerheitsproblem* LEERHEIT für allgemeine (Typ-0) Grammatiken ist definiert als:

Gegeben eine allgemeine Grammatik G, ist $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?

Beweisen Sie, dass LEERHEIT unentscheidbar ist.

Lösung:

Wir wissen aus dem Hinweis: zu jeder DTM M kann eine Grammatik G_M konstruiert werden, so dass gilt: $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G_M)$, und zu jeder Grammatik G kann eine DTM M_G konstruiert werden, so dass gilt: $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M_G)$. Also sind die Probleme LEERHEIT und LEERHEITDTM („Erkennt eine gegebene DTM die leere Sprache?“) aufeinander reduzierbar: entweder sind beide entscheidbar oder keines von beiden. Wir zeigen im Folgenden, dass LEERHEITDTM unentscheidbar ist.
Sei Ω die überall undefinierte Funktion, d.h. $\Omega(w)$ ist undefiniert für alle Wörter w. Laut dem Satz von Rice ist unentscheidbar, ob eine gegebene DTM Ω berechnet. Nennen wir dieses Problem BERECHNETUNDEF.
Sei f die Funktion, die ein gegebenes Wort w wie folgt verarbeitet:

(a) Bestimme die durch w kodierte DTM M_w.

(b) Bestimme aus M_w eine modifizierte DTM $\widetilde{M_w}$, die dieselbe Funktion berechnet wie M_w, aber nie mit einer ungültigen Ausgabe anhält, d.h. sie hält für eine gegebene Eingabe entweder mit einer gültigen Ausgabe oder gar nicht an.

(c) Liefere die Kodierung von $\widetilde{M_w}$ zurück.

Diese Funktion f ist eine Reduktion von BERECHNETUNDEF auf LEERHEITDTM, denn die durch w kodierte DTM berechnet die Funktion Ω genau dann, wenn $\widetilde{M_w}$ die leere Sprache akzeptiert. Da BERECHNETUNDEF unentscheidbar ist, ist somit auch LEERHEITDTM unentscheidbar.

Aufgabe 8.3 (Unentscheidbarkeit des Schnittproblems, 1 Punkt)

Das *Schnittproblem* SCHNITT für allgemeine (Typ-0) Grammatiken ist definiert als:

Gegeben zwei allgemeine Grammatiken G_1 und G_2, gilt $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$?

Beweisen Sie, dass SCHNITT unentscheidbar ist, indem Sie eine Reduktion und die Tatsache, dass LEERHEIT unentscheidbar ist, verwenden.

Lösung:
Wir verwenden eine Reduktion von LEERHEIT auf SCHNITT. Sei f die Funktion mit $f(G) = (G, G)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} G \in \text{LEERHEIT} \text{ gdw. } & \mathcal{L}(G) = \emptyset \\ \text{gdw. } & \mathcal{L}(G) \cap \mathcal{L}(G) = \emptyset \\ \text{gdw. } & (G, G) \in \text{SCHNITT} \\ \text{gdw. } & f(G) \in \text{SCHNITT} \end{aligned}$$

Die Funktion f ist total und berechenbar und reduziert LEERHEIT auf SCHNITT. Da LEERHEIT unentscheidbar ist, ist auch SCHNITT unentscheidbar.