Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 5 — Lösungen

Aufgabe 5.1 (Reguläre Ausdrücke; 2 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden regulären Ausdrücke über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Geben Sie jeweils zwei Wörter an, die in der entsprechenden Sprache liegen und jeweils zwei Wörter über Σ, die nicht in der entsprechenden Sprache liegen.

(a) $\mathtt{bba}|\mathtt{bbb}$

(b) $\mathtt{b}^*\mathtt{a}(\mathtt{b}^*\mathtt{ab}^*\mathtt{ab}^*)^*$

(c) $(\mathtt{a}(\mathtt{a}|\mathtt{b})|\mathtt{b})(\mathtt{a}|\mathtt{b})^*$

(d) $(\varepsilon|\mathtt{a})\mathtt{b}|\mathtt{b}\emptyset\mathtt{a}$

Lösung:

(a) $\mathcal{L}(\mathtt{bba}|\mathtt{bbb}) = \{\mathtt{bba}, \mathtt{bbb}\}$
In der Sprache liegen bba und bbb, nicht in der Sprache sind z.B. a und bbabb.

(b) $\mathcal{L}(\mathtt{b}^*\mathtt{a}(\mathtt{b}^*\mathtt{ab}^*\mathtt{ab}^*)^*) = \{w \in \Sigma^* \mid\ w \text{ enthält eine ungerade Anzahl von } \mathtt{a}\ \}$
In der Sprache liegen z.B. a oder ababbbaaa, nicht in der Sprache sind z.B. aa und abbbba.

(c) $\mathcal{L}((\mathtt{a}(\mathtt{a}|\mathtt{b})|\mathtt{b})(\mathtt{a}|\mathtt{b})^*) = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon, \mathtt{a}\}$
In der Sprache liegen z.B. b und ab, nicht in der Sprache sind ε und a.

(d) $\mathcal{L}((\varepsilon|\mathtt{a})\mathtt{b}|\mathtt{b}\emptyset\mathtt{a}) = \{\mathtt{b}, \mathtt{ab}\}$
In der Sprache liegen b und ab, nicht in der Sprache sind z.B. ε und ba.

Aufgabe 5.2 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen; 4 Punkte)

Sind die folgenden Sprachen über $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ regulär? Falls ja, beweisen Sie es, indem Sie einen regulären Ausdruck angeben, der die Sprache beschreibt. Falls nein, beweisen Sie es mit dem Pumping-Lemma.

(a) $L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{c}^{n+m} \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$

Lösung:

Angenommen L_1 ist regulär. Dann sei p eine Pumpingzahl von L_1. Das Wort $x = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^3\mathtt{c}^{p+3}$ ist in L_1 und erfüllt $|x| \geq p$. Vom Pumping-Lemma wissen wir, dass es Wörter u, v und w gibt mit $x = uvw$, $|uv| \leq p$, $|v| \geq 1$ und für alle $i \geq 0 : uv^iw \in L_1$.

Aus $|uv| \leq p$ können wir schliessen, dass uv nur aus as besteht. Wenn wir x kleiner pumpen, d.h. wir wählen $i = 0$, dann erhalten wir das Wort $x_0 := uv^0w = \mathtt{a}^{p-|v|}\mathtt{b}^3\mathtt{c}^{p+3}$. Wegen $|v| \geq 1$ wissen wir, dass $p - |v| + 3 < p + 3$ und sehen, dass $x_0 \notin L_1$ (da die Anzahl von as addiert mit der Anzahl von bs nicht die Anzahl von cs ergibt und die Eigenschaften der Sprache daher nicht erfüllt sind). Dies ist ein Widerspruch zum Pumping-Lemma und deshalb kann L_1 nicht regulär sein.

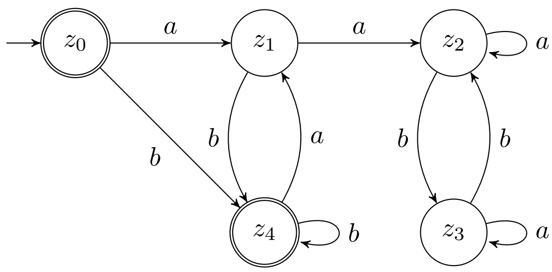
(b) $L_2 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^3\mathtt{c}^m\mathtt{d}^3 \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$

Lösung:

L_2 ist regulär, da sie von dem regulären Ausdruck $\mathtt{a}^*\mathtt{bbbc}^*\mathtt{ddd}$ beschrieben wird.

Aufgabe 5.3 (Minimalautomat; 2 Punkte)

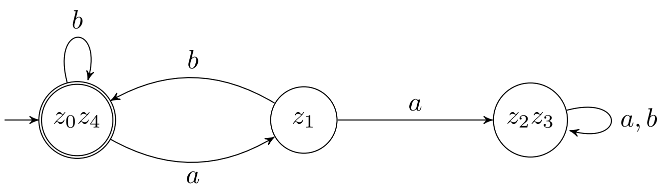
Geben Sie einen Minimalautomaten an, der zu folgendem DFA äquivalent ist.



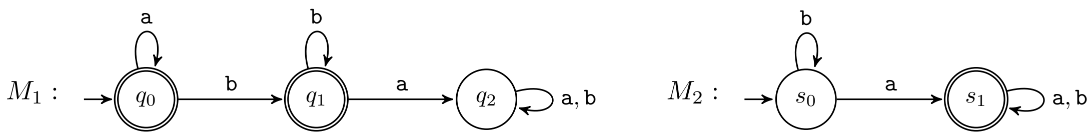
Lösung:
Zum Erstellen des Minimalautomaten verwenden wir den Algorithmus von Folie 17 Foliensatz C4.

z_1	×			
z_2	×	×		
z_3	×	×		
z_4		×	×	×
	z_0	z_1	z_2	z_3

Wir können also jeweils Knoten z_0 und z_4 und Knoten z_2 und z_3 verschmelzen und erhalten den Minimalautomaten:

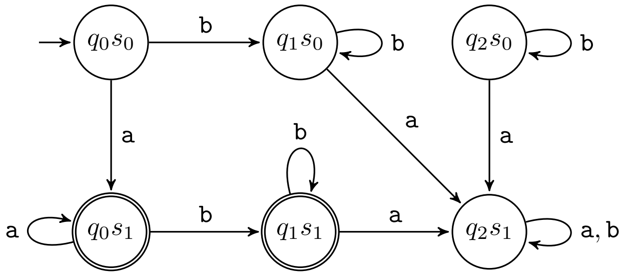


Aufgabe 5.4 (Kreuzproduktautomat; 2 Punkte)
Gegeben sind die folgenden beiden DFAs M_1 und M_2.



Geben Sie den Kreuzproduktautomaten an, der $\mathcal{L}(M_1) \cap \mathcal{L}(M_2)$ akzeptiert.
Wie müsste man (im Allgemeinen) die Definition der Endzustände ändern, um einen DFA für die Vereinigung zweier Sprachen zu erhalten?

Lösung:
$\mathcal{L}(M_1) = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid m, n \geq 0\}$, $\mathcal{L}(M_2) = \{w \mid w$ enhält mindestens ein $\mathtt{a}\}$
$\mathcal{L}(M_1) \cap \mathcal{L}(M_2) = \{a^m b^n \mid m \geq 1, n \geq 0\}$
Der Kreuzproduktautomat sieht folgendermassen aus:



Für den Schnitt der beiden Sprachen, ist ein Zustand des Kreuzproduktautomaten genau dann ein Endzustand, wenn er zwei Endzustände der Originalautomaten kombiniert. Würden wir nur verlangen, dass mindestens einer der beiden Zustände ein Endzustand eines Originalautomaten ist, erhielten wir einen Produktautomaten für die Vereinigung der beiden Sprachen.