Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 3 — Lösungen

Aufgabe 3.1 (Widerlegungstheorem; 1.5 Punkte)

Beweisen Sie das Widerlegungstheorem. Zeigen Sie also, dass für beliebige Formelmengen WB und Formeln φ folgendes gilt:

$$\mathrm{WB} \cup \{\varphi\} \text{ ist unerfüllbar gdw. } \mathrm{WB} \models \neg\varphi.$$

Lösung:

"$\Rightarrow$": Wenn $\mathrm{WB} \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar ist, dann gibt es keine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \mathrm{WB}$ and $\mathcal{I} \models \varphi$. Daher gilt für all $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \mathrm{WB}$, dass $\mathcal{I} \not\models \varphi$, und wir schliessen, dass $\mathrm{WB} \models \neg\varphi$.

"$\Leftarrow$": Wenn $\mathrm{WB} \models \neg\varphi$, dann gilt für alle $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \mathrm{WB}$, dass $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ und damit, dass $\mathcal{I} \not\models \varphi$. Daher gibt es keine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \mathrm{WB} \cup \{\varphi\}$, also ist $\mathrm{WB} \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar.

Aufgabe 3.2 (Korrektheit des Resolutionkalküls; 1.5 Punkte)

Beweisen Sie die Korrektheit der Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\},\ C_2 \cup \{\neg L\}}{C_1 \cup C_2},$$

das heisst zeigen Sie, dass für alle Interpretationsn $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \bigvee_{\ell \in C_1 \cup \{L\}} \ell$ und $\mathcal{I} \models \bigvee_{\ell \in C_2 \cup \{\neg L\}} \ell$ gilt, dass $I \models \bigvee_{\ell \in C_1 \cup C_2} \ell$.

Lösung:

Sei $\mathcal{I}$ ein Modell von $\bigvee_{\ell \in C_1 \cup \{L\}} \ell$ und von $\bigvee_{\ell \in C_2 \cup \{\neg L\}} \ell$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1 ($\mathcal{I} \models L$)*:* In diesem Fall können wir aus $\mathcal{I} \models \bigvee_{\ell \in C_2 \cup \{\neg L\}} \ell$ schliessen, dass $\mathcal{I} \models \bigvee_{\ell \in C_2} \ell$. Daraus folgt direkt, dass $I \models \bigvee_{\ell \in C_1 \cup C_2} \ell$.

Fall 2 ($\mathcal{I} \not\models L$)*:* Aus ($\mathcal{I} \not\models L$) folgt mit $\mathcal{I} \models \bigvee_{\ell \in C_1 \cup \{L\}} \ell$, dass $\mathcal{I} \models \bigvee_{\ell \in C_1} \ell$ und damit auch $I \models \bigvee_{\ell \in C_1 \cup C_2} \ell$.

Alle Schritte basieren auf der Semantik der Disjunktion. Da die beiden Fälle alle möglichen Situationen abdecken, gilt immer, dass $I \models \bigvee_{\ell \in C_1 \cup C_2} \ell$.

Aufgabe 3.3 (Resolutionskalkül; 3 Punkte)

Betrachten Sie die Wissensbasis

$$\begin{aligned}\mathrm{WB} = \{&(A \leftrightarrow \neg D), (\neg A \rightarrow (B \vee C)), ((A \rightarrow E) \wedge (B \vee C \vee F)), (E \rightarrow (F \rightarrow (B \vee C))),\\ &(C \rightarrow G), (G \rightarrow \neg C)\}.\end{aligned}$$

Verwenden sie den Resolutionskalkül, um zu zeigen, dass $\mathrm{WB} \models (B \wedge \neg C)$.

Lösung:

Um zu zeigen, dass $WB \models (B \wedge \neg C)$, zeigen wir, dass $WB' = WB \cup \{\neg(B \wedge \neg C)\}$ unerfüllbar ist. Da wir Resolution verwenden wollen, müssen wir WB' zunächst in Klauselform bringen:

Formeln (und Äquivalenzen)	Klauseln
$(A \leftrightarrow \neg D)$ $\equiv ((A \rightarrow \neg D) \wedge (\neg D \rightarrow A))$ $\equiv ((\neg A \vee \neg D) \wedge (\neg\neg D \vee A))$ $\equiv ((\neg A \vee \neg D) \wedge (D \vee A))$	$\{\neg A, \neg D\}$ $\{A, D\}$
$(\neg A \rightarrow (B \vee C))$ $\equiv (\neg\neg A \vee (B \vee C))$ $\equiv (A \vee B \vee C)$	$\{A, B, C\}$
$((A \rightarrow E) \wedge (B \vee C \vee F))$ $\equiv ((\neg A \vee E) \wedge (B \vee C \vee F))$	$\{\neg A, E\}$ $\{B, C, F\}$
$(E \rightarrow (F \rightarrow (B \vee C)))$ $\equiv (\neg E \vee (\neg F \vee (B \vee C)))$ $\equiv (\neg E \vee \neg F \vee B \vee C)$	$\{B, C, \neg E, \neg F\}$
$(C \rightarrow G) \equiv (\neg C \vee G)$	$\{\neg C, G\}$
$(G \rightarrow \neg C) \equiv (\neg G \vee \neg C)$	$\{\neg C, \neg G\}$
$\neg(B \wedge \neg C) \equiv (\neg B \vee C)$	$\{\neg B, C\}$

Wir müssen die leere Klausel $\square$ also aus folgender Klauselmenge Δ ableiten:

$$\begin{aligned}\Delta = \{&\{\neg A, \neg D\}, \{A, D\}, \{A, B, C\}, \{\neg A, E\}, \{B, C, F\}, \\ &\{B, C, \neg E, \neg F\}, \{\neg C, G\}, \{\neg C, \neg G\}, \{\neg B, C\}\}.\end{aligned}$$

Eine mögliche Ableitung ist:

$$\begin{array}{ll}
K_1 = \{\neg C, G\} & \text{aus } \Delta \\
K_2 = \{\neg C, \neg G\} & \text{aus } \Delta \\
K_3 = \{\neg C\} & \text{aus } K_1 \text{ und } K_2 \\
K_4 = \{A, B, C\} & \text{aus } \Delta \\
K_5 = \{A, B\} & \text{aus } K_3 \text{ und } K_4 \\
K_6 = \{C, \neg B\} & \text{aus } \Delta \\
K_7 = \{\neg B\} & \text{aus } K_3 \text{ und } K_6 \\
K_8 = \{A\} & \text{aus } K_5 \text{ und } K_7 \\
K_9 = \{\neg A, E\} & \text{aus } \Delta \\
K_{10} = \{E\} & \text{aus } K_8 \text{ und } K_9 \\
K_{11} = \{B, C, \neg E, \neg F\} & \text{aus } \Delta \\
K_{12} = \{B, C, \neg F\} & \text{aus } K_{10} \text{ und } K_{11} \\
K_{13} = \{C, \neg F\} & \text{aus } K_7 \text{ und } K_{12} \\
K_{14} = \{\neg F\} & \text{aus } K_3 \text{ und } K_{13} \\
K_{15} = \{B, C, F\} & \text{aus } \Delta \\
K_{16} = \{C, F\} & \text{aus } K_7 \text{ und } K_{15} \\
K_{17} = \{C\} & \text{aus } K_{14} \text{ und } K_{16} \\
K_{18} = \square & \text{aus} K_3 \text{ und } K_{17}
\end{array}$$

Mit dem Widerlegungstheorem können wir folgern, dass $WB \models (B \wedge \neg C)$.

Aufgabe 3.4 (Prädikatenlogik; 3 Punkte)
Betrachten Sie die folgende prädikatenlogische Formel φ über der Signatur $\langle\{x, y\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{f}, \mathrm{g}\}, \{\mathrm{P}\}\rangle$.

$$\varphi = (\neg \mathrm{P}(\mathrm{c}) \wedge \forall x \exists y\, ((\mathrm{f}(y) = \mathrm{g}(x)) \wedge \mathrm{P}(y)))$$

Geben Sie ein Modell $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ von φ an und *beweisen* Sie, dass $\mathcal{I} \models \varphi$. Warum ist es nicht notwendig, eine Variablenbelegung α zu spezifieren, um ein Modell von φ anzugeben?

Lösung:

Die folgende Interpretation $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ ist ein Modell von φ.

$$\begin{aligned}
&U = \{u_1, u_2, u_3\}\\
&\mathrm{c}^{\mathcal{I}} = u_1\\
&\mathrm{f}^{\mathcal{I}} = \mathrm{g}^{\mathcal{I}} = \{u_1 \mapsto u_3, u_2 \mapsto u_3, u_3 \mapsto u_3\}\\
&\mathrm{P}^{\mathcal{I}} = \{u_3\}
\end{aligned}$$

Für jedes $u \in U$ definieren wir $\alpha_u = x \mapsto u, y \mapsto u_3$.

$$\begin{aligned}
\text{Per Definition gilt } \mathrm{f}(y)^{\mathcal{I},\alpha_u} &= \mathrm{f}^{\mathcal{I}}(y^{\mathcal{I},\alpha_u}) = \mathrm{f}^{\mathcal{I}}(\alpha_u(y)) = \mathrm{f}^{\mathcal{I}}(u_3) = u_3\\
\text{und } \mathrm{g}(x)^{\mathcal{I},\alpha_u} &= \mathrm{g}^{\mathcal{I}}(x^{\mathcal{I},\alpha_u}) = \mathrm{g}^{\mathcal{I}}(\alpha_u(x)) = \mathrm{g}^{\mathcal{I}}(u) = u_3\\
\text{und damit } \mathrm{f}(y)^{\mathcal{I},\alpha_u} &= \mathrm{g}(x)^{\mathcal{I},\alpha_u}\\
\text{Es folgt } \mathcal{I}, \alpha_u &\models (\mathrm{f}(y) = \mathrm{g}(x))\\
\text{Per Definition gilt ausserdem } y^{\mathcal{I},\alpha_u} &= \alpha_u(y) = u_3 \in \mathrm{P}^{\mathcal{I}} \text{ also } \mathcal{I}, \alpha_u \models \mathrm{P}(y)\\
\text{Zusammen mit der Zeile davor folgern wir } \mathcal{I}, \alpha_u &\models ((\mathrm{f}(y) = \mathrm{g}(x)) \land \mathrm{P}(y))
\end{aligned}$$

Für jede Variablenbelegung α gilt $\alpha[x := u][y := u_3] = \alpha_u$. Daher folgt für jedes α und jedes $u \in U$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}, \alpha[x := u][y := u_3] &\models ((\mathrm{f}(y) = \mathrm{g}(x)) \land \mathrm{P}(y))\\
\mathcal{I}, \alpha[x := u] &\models \exists y\, ((\mathrm{f}(y) = \mathrm{g}(x)) \land \mathrm{P}(y))\\
\mathcal{I}, \alpha &\models \forall x \exists y\, ((\mathrm{f}(y) = \mathrm{g}(x)) \land \mathrm{P}(y))
\end{aligned}$$

Ausserdem gilt $\mathrm{c}^{\mathcal{I},\alpha} = \mathrm{c}^{\mathcal{I}} = u_1 \notin \mathrm{P}^{\mathcal{I}}$ also $\mathcal{I}, \alpha \not\models \mathrm{P}(\mathrm{c})$ oder $\mathcal{I}, \alpha \models \neg\mathrm{P}(\mathrm{c})$. Zusammen erhalten wir

$$\mathcal{I}, \alpha \models (\neg\mathrm{P}(\mathrm{c}) \land \forall x \exists y\, ((\mathrm{f}(y) = \mathrm{g}(x)) \land \mathrm{P}(y))).$$

Da alle Variablen gebunden sind, hängt der Beweis nicht von der Variablenbelegung α ab, und sie wird nicht benötigt um ein Modell anzugeben.

Aufgabe 3.5 (Prädikatenlogik; 1 Punkt)

Betrachten Sie die Formel φ über einer Signatur mit den Prädikatsymbolen P (1-stellig), Q (2-stellig) und R (3-stellig), dem 1-stelligen Funktionssymbol f, dem Konstantensymbol c und den Variablensymbolen x, y und z.

$$\varphi = (\forall x \exists y\, (\mathrm{P}(z) \to \mathrm{Q}(y, x)) \lor \neg\exists y\, \mathrm{R}(\mathrm{c}, x, \mathrm{f}(y)))$$

Markieren Sie die freien Variablenvorkommen in φ. Geben Sie *zusätzlich* die Menge der freien Variablen von φ an (ohne Beweis).

Lösung:

$$\varphi = (\forall x \exists y\, (\mathrm{P}(\underline{z}) \to \mathrm{Q}(y, x)) \lor \neg\exists y\, \mathrm{R}(\mathrm{c}, \underline{x}, \mathrm{f}(y))).$$

$$\mathit{frei}(\varphi) = \{x, z\}$$