**Theorie der Informatik**

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

# Übungsblatt 2 — Lösungen

**Aufgabe 2.1** (Semantik; 0.5+0.5+1+1+1 Punkte)
Betrachten Sie die aussagenlogische Formel $\varphi$ über $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}\}$:

$$\varphi = ((\mathrm{F} \lor ((\lnot\mathrm{B} \leftrightarrow ((\mathrm{C} \land \mathrm{A}) \to \lnot\mathrm{B})) \lor (\mathrm{D} \to \mathrm{E}))) \to (\mathrm{A} \to \lnot\mathrm{F}))$$

(a) Wieviele Zeilen hätte eine Wahrheitstafel für $\varphi$?

**Lösung:**

Da $\varphi$ 6 verschiedene atomare Aussagen hat, hätte die Wahrheitstafel $2^6 = 64$ Zeilen.

(b) Die Formel $\varphi$ ist eine Implikation. Geben Sie zuerst eine Wahrheitstafel für das allgemeine Schema einer Implikation $(\varphi \to \psi)$ an (siehe Kapitel B1, Folie 30). Achtung: die gefragte Wahrheitstafel ist **nicht** die Wahrheitstafel von $\varphi$.

**Lösung:**

| $\mathcal{I} \models \varphi$ | $\mathcal{I} \models \psi$ | $\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)$ |
|---|---|---|
| Nein | Nein | Ja |
| Nein | Ja | Ja |
| Ja | Nein | Nein |
| Ja | Ja | Ja |

(c) Geben Sie nun ein Modell $\mathcal{I}$ für $\varphi$ an und beweisen Sie ohne Wahrheitstafel, dass $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt.

**Lösung:**

$$\mathcal{I} = \{\mathrm{A} \mapsto 1, \mathrm{B} \mapsto 1, \mathrm{C} \mapsto 1, \mathrm{D} \mapsto 1, \mathrm{E} \mapsto 1, \mathrm{F} \mapsto 0\}$$

Um den Beweis übersichtlicher zu gestalten, definieren wir:

$$\psi = (\mathrm{F} \lor ((\lnot\mathrm{B} \leftrightarrow ((\mathrm{C} \land \mathrm{A}) \to \lnot\mathrm{B})) \lor (\mathrm{D} \to \mathrm{E})))$$

Aus $\mathcal{I}(\mathrm{F}) = 0$ folgt $\mathcal{I} \not\models \mathrm{F}$ und daraus $\mathcal{I} \models \lnot\mathrm{F}$. Damit gilt auch $\mathcal{I} \models (\mathrm{A} \to \lnot\mathrm{F})$ (unabhängig davon ob $\mathcal{I} \models \mathrm{A}$ gilt oder nicht). Daraus folgt $\mathcal{I} \models (\psi \to (\mathrm{A} \to \lnot\mathrm{F}))$ (unabhängig davon ob $\mathcal{I} \models \psi$ gilt oder nicht). Die Formel $(\psi \to (\mathrm{A} \to \lnot\mathrm{F}))$ ist $\varphi$, das heisst wir haben $\mathcal{I} \models \varphi$ gezeigt.

(d) Geben Sie eine Belegung $\mathcal{I}$ an, für die $\mathcal{I} \not\models \varphi$ gilt und beweisen Sie diese Aussage ohne Wahrheitstafel.

**Lösung:**

$$\mathcal{I} = \{\mathrm{A} \mapsto 1, \mathrm{B} \mapsto 1, \mathrm{C} \mapsto 1, \mathrm{D} \mapsto 1, \mathrm{E} \mapsto 1, \mathrm{F} \mapsto 1\}$$

Um den Beweis übersichtlicher zu gestalten, definieren wir:

$$\psi = ((\lnot\mathrm{B} \leftrightarrow ((\mathrm{C} \land \mathrm{A}) \to \lnot\mathrm{B})) \lor (\mathrm{D} \to \mathrm{E}))$$

Aus $\mathcal{I}(\mathrm{F}) = 1$ folgt $\mathcal{I} \models \mathrm{F}$ und daraus $\mathcal{I} \models (\mathrm{F} \lor \psi)$ (unabhängig davon ob $\mathcal{I} \models \psi$ gilt oder nicht).

Aus $\mathcal{I}(\mathrm{A}) = 1$ folgt $\mathcal{I} \models \mathrm{A}$. Aus $\mathcal{I} \models \mathrm{F}$ folgt $\mathcal{I} \not\models \neg\mathrm{F}$. Aus $\mathcal{I} \models \mathrm{A}$ und $\mathcal{I} \not\models \neg\mathrm{F}$ zusammen folgt $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{A} \to \neg\mathrm{F})$.

Aus $\mathcal{I} \models (\mathrm{F} \lor \psi)$ und $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{A} \to \neg\mathrm{F})$ folgt $\mathcal{I} \not\models ((\mathrm{F} \lor \psi) \to (\mathrm{A} \to \neg\mathrm{F}))$. Die Formel $((\mathrm{F} \lor \psi) \to (\mathrm{A} \to \neg\mathrm{F}))$ ist $\varphi$, das heisst wir haben $\mathcal{I} \not\models \varphi$ gezeigt.

(e) Welche der Eigenschaften *erfüllbar*, *unerfüllbar*, *gültig*, und *falsifizierbar* hat $\varphi$? Begründen Sie Ihre Antwort für jede der vier Eigenschaften.

**Lösung:**

- Die Formel $\varphi$ ist erfüllbar, da die Interpretation aus Teilaufgabe (c) ein Modell ist. Daher ist $\varphi$ nicht unerfüllbar.
- Die Formel $\varphi$ ist falsifizierbar, da die Interpretation aus Teilaufgabe (d) kein Modell ist. Daher ist $\varphi$ nicht gültig.

**Aufgabe 2.2** (Äquivalenzen; 1.5+1.5 Punkte)

(a) Verwenden Sie die Äquivalenzen aus der Vorlesung um die folgende Formel in KNF zu bringen. Wenden Sie in jedem Schritt nur eine Äquivalenz an und geben Sie diese an.

$$\varphi = ((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \leftrightarrow \neg\mathrm{C})$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
\varphi &= ((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \leftrightarrow \neg\mathrm{C}) & \\
&\equiv ((\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}) \leftrightarrow \neg\mathrm{C}) & (\to\text{-Eliminierung}) \\
&\equiv (((\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}) \to \neg\mathrm{C}) \land (\neg\mathrm{C} \to (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}))) & (\leftrightarrow\text{-Eliminierung}) \\
&\equiv ((\neg(\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}) \lor \neg\mathrm{C}) \land (\neg\mathrm{C} \to (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}))) & (\to\text{-Eliminierung}) \\
&\equiv ((\neg(\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}) \lor \neg\mathrm{C}) \land (\neg\neg\mathrm{C} \lor (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}))) & (\to\text{-Eliminierung}) \\
&\equiv ((\neg(\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}) \lor \neg\mathrm{C}) \land (\mathrm{C} \lor (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}))) & (\text{Doppelnegation}) \\
&\equiv (((\neg\neg\mathrm{A} \land \neg\mathrm{B}) \lor \neg\mathrm{C}) \land (\mathrm{C} \lor (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}))) & (\text{De Morgan}) \\
&\equiv (((\mathrm{A} \land \neg\mathrm{B}) \lor \neg\mathrm{C}) \land (\mathrm{C} \lor (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}))) & (\text{Doppelnegation}) \\
&\equiv ((\neg\mathrm{C} \lor (\mathrm{A} \land \neg\mathrm{B})) \land (\mathrm{C} \lor (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}))) & (\text{Kommutativität}) \\
&\equiv (((\neg\mathrm{C} \lor \mathrm{A}) \land (\neg\mathrm{C} \lor \neg\mathrm{B})) \land (\mathrm{C} \lor (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{B}))) & (\text{Distributivität})
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Formel unerfüllbar ist, indem Sie zeigen, dass $\varphi \equiv (\mathrm{A} \land \neg\mathrm{A})$ gilt. Verwenden Sie die Äquivalenzen aus der Vorlesung, wenden Sie in jedem Schritt nur eine Äquivalenz an und geben Sie diese an.

$$\varphi = \neg((\mathrm{A} \land (\neg\mathrm{B} \to \mathrm{A})) \lor \neg\mathrm{A})$$

**Lösung:**

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \neg((\mathrm{A} \land (\neg\mathrm{B} \to \mathrm{A})) \lor \neg\mathrm{A}) & \\
&\equiv \neg((\mathrm{A} \land (\neg\neg\mathrm{B} \lor \mathrm{A})) \lor \neg\mathrm{A}) & (\to\text{-Eliminierung}) \\
&\equiv \neg((\mathrm{A} \land (\mathrm{A} \lor \neg\neg\mathrm{B})) \lor \neg\mathrm{A}) & (\text{Kommutativität}) \\
&\equiv \neg(\mathrm{A} \lor \neg\mathrm{A}) & (\text{Absorption}) \\
&\equiv (\neg\mathrm{A} \land \neg\neg\mathrm{A}) & (\text{De Morgan}) \\
&\equiv (\neg\mathrm{A} \land \mathrm{A}) & (\text{Doppelnegation}) \\
&\equiv (\mathrm{A} \land \neg\mathrm{A}) & (\text{Kommutativität})
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 2.3** (Logische Konsequenz; 1.5+1.5 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Formelmenge über $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$.

$$\mathrm{WB} = \{(\mathrm{A} \to \neg\mathrm{C}), (\mathrm{A} \lor \neg\mathrm{B}), (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{C})\}$$

(a) Gibt es ein Modell $\mathcal{I}$ von WB, das auch ein Modell der Formel $\varphi = (\mathrm{A} \lor \mathrm{B})$ ist? Beweisen Sie Ihre Aussage.

**Lösung:**

Nein. Wir beweisen das mit einem Widerspruchsbeweis: Angenommen es gibt ein $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \mathrm{WB}$ und $\mathcal{I} \models (\mathrm{A} \lor \mathrm{B})$. Dann gilt $\mathcal{I} \models \mathrm{A}$ oder $\mathcal{I} \models \mathrm{B}$. Wir machen eine Fallunterscheidung über diese beiden Fälle.

*Fall 1* ($\mathcal{I} \models \mathrm{A}$): Aus $\mathcal{I} \models \mathrm{WB}$ folgt $\mathcal{I} \models (\mathrm{A} \to \neg\mathrm{C}) = (\neg\mathrm{A} \lor \neg\mathrm{C})$. Daraus folgt $\mathcal{I} \models \neg\mathrm{A}$ oder $\mathcal{I} \models \neg\mathrm{C}$. Der erste Teil kann nicht auftreten, da aus $\mathcal{I} \models \mathrm{A}$ auch $\mathcal{I} \not\models \neg\mathrm{A}$ folgt. Daher muss der zweite Teil ($\mathcal{I} \models \neg\mathrm{C}$) gelten.

Ausserdem folgt aber aus $\mathcal{I} \models \mathrm{WB}$ auch $\mathcal{I} \models (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{C})$ also $\mathcal{I} \models \neg\mathrm{A}$ oder $\mathcal{I} \models \mathrm{C}$. Nun kann aber weder $\mathcal{I} \models \neg\mathrm{A}$ gelten (weil $\mathcal{I} \models \mathrm{A}$ gilt) noch $\mathcal{I} \models \mathrm{C}$ (weil $\mathcal{I} \models \neg\mathrm{C}$ gilt). In diesem Fall gibt es also einen Widerspruch.

*Fall 2* ($\mathcal{I} \not\models \mathrm{A}$): Da $\mathcal{I} \models (\mathrm{A} \lor \mathrm{B})$ gilt, dass $\mathcal{I} \models \mathrm{B}$ und damit $\mathcal{I} \not\models \neg\mathrm{B}$. Wegen $\mathcal{I} \not\models \mathrm{A}$ und $I \not\models \neg\mathrm{B}$ wissen wir, dass $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{A} \lor \neg\mathrm{B})$. Da $(\mathrm{A} \lor \neg\mathrm{B}) \in \mathrm{WB}$ ist dies ein Widerspruch zu $\mathcal{I} \models \mathrm{WB}$.

(b) Zeigen Sie, dass alle Modelle $\mathcal{I}$ von WB, auch Modelle der Formel $\varphi = (\neg\mathrm{B} \lor \mathrm{C})$ sind.

**Lösung:**

Wir betrachten ein Modell $\mathcal{I}$ von WB. Aus $\mathcal{I} \models \mathrm{WB}$ folgt $\mathcal{I} \models (\mathrm{A} \lor \neg\mathrm{B})$. Daraus folgt $\mathcal{I} \models \mathrm{A}$ oder $\mathcal{I} \models \neg\mathrm{B}$.

Im ersten Fall ($\mathcal{I} \models \mathrm{A}$) folgern wir aus $\mathcal{I} \models \mathrm{WB}$, dass $\mathcal{I} \models (\neg\mathrm{A} \lor \mathrm{C})$ gilt und daraus folgt $\mathcal{I} \models \neg\mathrm{A}$ oder $\mathcal{I} \models \mathrm{C}$. Der erste Teil widerspricht dem Fall, den wir betrachten ($\mathcal{I} \models \mathrm{A}$), daher muss $\mathcal{I} \models \mathrm{C}$ gelten. Daraus folgt dann $\mathcal{I} \models (\neg\mathrm{B} \lor \mathrm{C})$.

Im zweiten Fall ($\mathcal{I} \models \neg\mathrm{B}$) folgt $\mathcal{I} \models (\neg\mathrm{B} \lor \mathrm{C})$ direkt.