Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 1 — Lösungen

Aufgabe 1.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie mit einem direkten Beweis: Für alle endlichen Menge S gilt, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(S)$ Kardinalit $2^{|S|}$ hat.

Lösung:

Sei S eine beliebige endliche Menge. Man kann jede Teilmenge von S bilden, indem man über alle Elemente e von S geht und e entweder in die Teilmenge aufnimmt oder nicht. Jede Sequenz von Entscheidungen ergibt dabei eine unterschiedliche Teilmenge.
Insgesamt hat S also $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{|S| \text{ mal}} = 2^{|S|}$ Teilmengen und damit ist $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$.

Aufgabe 1.2 (2 Punkte)

Beweisen Sie mit einem Beweis durch Widerspruch, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Wenn $n + 7$ eine Primzahl ist, dann ist n keine Primzahl.

Lösung:

Angenommen es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $n + 7$ und n Primzahlen sind.
Entweder n oder $n+7$ muss gerade sein, da eine gerade Zahl plus 7 ungerade ist und eine ungerade Zahl plus 7 gerade. Es gibt nur eine gerade Primzahl (2) und $n+7$ ist auf jeden Fall grösser. Daher muss $n = 2$ gelten. Damit ist aber $n+7 = 9 = 3\cdot 3$ keine Primzahl. $\rightsquigarrow$ Widerspruch zur Annahme, dass $n + 7$ und n Primzahlen sind.

Aufgabe 1.3 (1 + 2 Punkte)

(a) Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass $n! > 2^n$ für alle $n \geq 4$.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 4$: $4! = 24 > 16 = 2^4$

Induktionsvoraussetzung: $k! > 2^k$ für alle $4 \leq k \leq n$

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1) \cdot n! \\ &\overset{\text{IV}}{>} (n+1) \cdot 2^n \\ &> 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}\end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie per Induktion über die Anzahl n der Elemente von S, dass für jede endliche Menge S die Potenzmenge $\mathcal{P}(S)$ Kardinalit $2^{|S|}$ hat.

Lösung:

Induktionsanfang $n = 0$ bzw. $S = \emptyset$: $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$.

Induktionsannahme: für alle endlichen Mengen S mit $|S| \leq n$ gilt $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$.

Induktionsschritt $n \to n + 1$:

Sei S eine beliebige Menge mit $n+1$ Elementen und sei e ein beliebiges Element aus S. Definiere $S' = S \setminus \{e\}$. Damit ist $|S'| = n$ und laut Induktionsannahme gibt es insgesamt $2^{|S'|}$ Teilmengen $T \subseteq S'$. Für jede Teilmenge $T \subseteq S'$ sind T selbst und $T \cup \{e\}$ Teilmengen von S. Diese Menge sind alle Teilmengen von S und gleichzeitig alle verschieden. Es gilt also $|\mathcal{P}(S)| = 2|\mathcal{P}(S')| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = 2^{|S|}$.

Aufgabe 1.4 (3 Punkte)
Wir definieren zunächst induktiv eine einfache Teilmenge von mathematischen Ausdrücken, die nur die Zeichen „`N`“, „`Z`“, „$\oplus$“, „$\otimes$“, „$[\![$“ und „$]\!]$“ verwenden. Die Menge $\mathcal{E}$ der *einfachen Ausdrücke* ist induktiv wie folgt definiert:

- `N` und `Z` sind einfache Ausdrücke.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $[\![x \otimes y]\!]$ ein einfacher Ausdruck.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $[\![x \oplus y]\!]$ ein einfacher Ausdruck.

Beispiele für einfache Ausdrücke: $\mathtt{Z}$, $[\![\mathtt{Z} \otimes \mathtt{N}]\!]$, $[\![[\![\mathtt{Z} \otimes \mathtt{Z}]\!] \oplus [\![\mathtt{N} \oplus \mathtt{Z}]\!]]\!]$
Ausserdem definieren wir eine Funktion $f : \mathcal{E} \to \mathbb{N}_0$ als

- $f(\mathtt{N}) = 0$, $f(\mathtt{Z}) = 2$
- $f([\![x \otimes y]\!]) = f(x) \cdot f(y)$
- $f([\![x \oplus y]\!]) = f(x) + f(y)$

Also zum Beispiel: $f(\mathtt{Z}) = 2$, $f([\![\mathtt{Z} \otimes \mathtt{N}]\!]) = f(\mathtt{Z}) \cdot f(\mathtt{N}) = 2 \cdot 0 = 0$, $f([\![[\![\mathtt{Z} \otimes \mathtt{Z}]\!] \oplus [\![\mathtt{N} \oplus \mathtt{Z}]\!]]\!]) = 6$.
Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden einfachen Ausdruck $x \in \mathcal{E}$ gilt, dass

$$f(x) \text{ ist gerade.}$$

Lösung:
Wir zeigen die Aussage durch Induktion über die Struktur der einfachen Aussagen.
Induktionsanfang: Die Aussage gilt offensichtlich für alle Basisfälle, da $f(\mathtt{N}) = 0$ und $f(\mathtt{Z}) = 2$ gerade sind.
Induktionsvoraussetzung: Wenn x und y Teilausdrücke eines zusammengesetzten Ausdrucks z sind, dann sind $f(x)$ und $f(y)$ gerade.
Induktionsschritt: Wir müssen zeigen, dass die Aussage für zusammengesetzte Ausdrücke z gilt, unter der Induktionsvoraussetzung, dass sie für alle Teilausdrücke gilt.
Für den Fall $z = [\![x \otimes y]\!]$ gilt $f(z) = f(x) \cdot f(y)$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $f(x)$ und $f(y)$ beide gerade, d.h., es gibt $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 2n$ und $f(y) = 2m$. Damit ist $f(z) = 2n \cdot 2m = 4nm$ auch gerade.
Analog dazu gilt für den Fall $z = [\![x \oplus y]\!]$: $f(z) = f(x) + f(y)$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $f(x)$ und $f(y)$ beide gerade, d.h., es gibt $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 2n$ und $f(y) = 2m$. Damit ist $f(z) = 2n + 2m = 2(n + m)$ auch gerade.